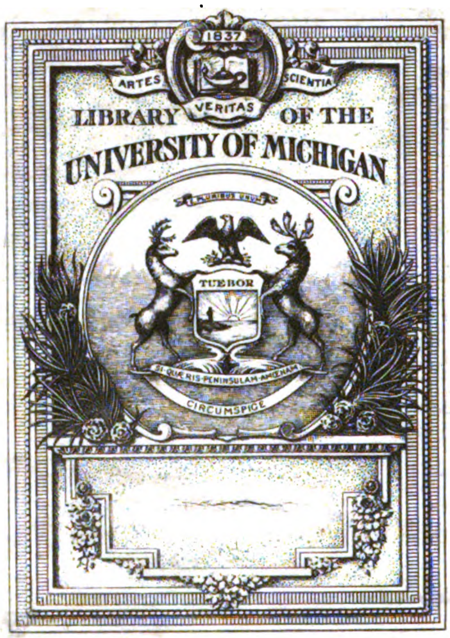

1837
ARTES
VERITAS
SCIENTIA
LIBRARY OF THE
UNIVERSITY OF MICHIGAN
TUEBOR
SI QUAERIS PENINSULAM AMOENAM
CIRCUMSPICE

CABBALA ALGEBRAICA.

SIVE

SURSOLIDÆ ÆQUATIONIS ET ALTIORUM

RESOLVTIO ALGEBRAICA.

AUCTORE

Wilhelm Ludwig

GUILIELMO LUDOVICO CHRISTMANN,

PHILOSOPHIAE DOCTORE.

Stuttgardiæ,
in Bibliopolio Frankhiano
1827.

Praesenti scripto theoria aequationem sursolidam *resolvendi* continetur; eamque resolutionem transegi ope *Cabbalae*. Edidi olim dissertationes:

Ars Cossas promota 1813.
Cardanus Suevus 1815.
Philosophia cossica 1815.
Aetas argentea cossae 1818.

Sed ut fieri solet cum scriptis diverso tempore editis, dissertationes istae distractae sunt hinc et illinc, et vix unus et alter lectorum est, qui illas omnes et singulas possidet. Quare quum praesens scriptum plerumque prioribus inventis *nitatur*, et ista priora in paucorum notitiam pervenerint, ideo coactus fui, opusculorum dictorum, ut ita dicam, quintam Essentiam heic *denno* exhibere, sed crebris interspersam gravissimis Observationibus vel novis inventis etiam. Sic fit, ut hoc opus Cabbalae absolutè legi possit *absque* istis prioribus. Quoniam autem nunc serio de *resolutione* sursolidae cossae agitur, ideoque et istis *prioribus* novum insigne momentum accedit, ergo (quum non omnia ex istis huc transscribi potuerint) valde optem, ut priorum scriptorum exemplar, saltim in bibliothecas Academicas tanquam in portum et asylum litterarium, dum tempus est salvetur. Id ita necesse videtur ad recognitionem idearum ibi contentarum, vel imo jam propter *Historiam* problematis. Ceterum lectores monemus, et macte esse jubemus, ne in hoc opere cabbalae forsan calculos magnos et *prolixos* vel etiam dubios *incertosve* praemetuant; siquidem in *Elysio* potius cossico et plerumque per Thessala *Tempe* viam facturi sunt. Regulas autem et principia a nobis inventa, ad sumtus minuendos cis omnes *ambages* quidem (*clarissime* tamen semper) exponam. Quibus priora opuscula innotuerunt, ii monentur, ut praesens opus ab integro tamen et sollicite perlegant, siquidem ea, quae ex prioribus scriptis huc traduxi, multis novis observationibus interspersa sunt, quas sciri opus est.

Nota. Exponentes *fracti* a typotheta, quum debitis typis careret, aliquoties positione *transversa* exhibiti sunt. Intellige ergo positionem *verticalem*, et verbi causa excusum terminum $\beta^{1/3}$ intelliges esse $=\sqrt[3]{\beta}$. Res intelligentem nil morabitur et vix ter vel *quater* occurrit, et solummodo in *primis* libri paginis; posthac nunquam. Rem incongruam enim instanter *cohibui*.) —

§. 1.

Leonh. Euleri divinatio (Comment. Petrop. T. VI. 1738) est aequationis $x^{m} = ax^{m-2} + bx^{m-3} + \dots$ dari radicem *hujus* formae:

1) $$x = \sqrt[m]{A} + \sqrt[m]{B} + \sqrt[m]{C} + \dots$$

ita ut A, B, C. ... sint radices hujus aequationis *Resolventis:*

2) $$z^{m-1} = \alpha z^{m-2} - \beta z^{m-3} + \dots + \pi.$$

Tale principium universale (seu dicas Hypothesin) stabilire pro magna et abstrusa *Veritate* aliqua eruenda, utique generosi quid habet, et nescio quid immortale sapit. Imo dum *Theoria* nulla praesto erat, hypotheses interim pro sacrâ Ancorâ erant. Jam vero si dicta Euteri positio (1) a casu $m=5$ forte *non* sufficiens vel apta deprehendatur, tum quaestio oritur, num id ita fiat aliquo *Hypotheseos* vitio, an quia sursolidam resolvi posse, contradictorium et *impossibile* sit. Casu priori accusanda foret

humani *ingenii* debilitas, et corrigenda foret *hypothesis*, casu secundo autem culpanda erit contumax ipsius *Objecti* natura. — Laborare autem sursolidam radicem aliquo Gordio nodo, id jam ex analogia *cubicae* praevidebatur; quae nempe casu trium radicum possibilium famosam illam formam *irreducibilem* seu *imaginariam* exhibet. Calculus enim ibi ex angustiis, in quibus versatur, non aliter se nisi per actum quasi *desperationis* extricat, et radix *possibilis* exhibetur per duo frusta *impossibilia*, quorum pars autem imaginaria se mutuo *destruit*. Ergo pro casu sursolido longe *abstrusior* quaedam casuum irreducibilium species praevideri potuit. — Jam de forma (1), quod e re est loquar; quo facto ad propriam ac domesticam theoriam, et quae nulli hypothesi sit obnoxia, subinde transequitabimus. — Valere formam (1) pro $x^2 = a$, ultro patet. Sit ergo $x^3 = ax + b$, (3) $x = \sqrt[3]{A} + \sqrt[3]{B}$, $z^2 = \alpha z - \beta$, radicum A, B, unde sumto illius (3) cubo fit:

$$4) \qquad x^3 = 3x\sqrt[3]{AB} + A + B.$$

unde comparando cum resolvenda fit $A + B = b$, $AB = \frac{a^3}{27}$; ergo $z^2 = bz - \frac{a^3}{27}$; quae est resolvens Cardani. Habeat $y^3 - 1 = 0$ radices $1, m, n$. Ergo promiscue ponitur:

$$x = m\sqrt[3]{A} + n\sqrt[3]{B}.$$

Quae formula permutatis invicem m et n sistit radices ambas *reliquas*. Nimirum fit:

$$x^3 = 3mnx\sqrt[3]{AB} + m^3 A + n^3 B.$$

Quae cum (4) collata, offert $mn = 1$, $m^3 = 1$, $n^3 = 1$. Et prodeunt ergo determinationes aequationi $y^3 - 1 = 0$ prorsus consentaneae. — Sed jam operatio valde memoranda succedit. Ponatur $u^2 = \lambda u - \pi$, radicum M, N. Sumatur:

$$M = \sqrt[3]{A},\ N = \sqrt[3]{B},\ \text{id est } u = \sqrt[3]{z}.$$

Hinc fit $\lambda = M + N = x$, et $\pi = MN = \beta^{1/3}$. Et sic jam theoria aequationis cubicae complete ante oculos est; habetur nempe sequens aequationum conjugatarum quasi *Trias:*

$$5) \qquad \begin{aligned} x^3 &= ax + b \\ z^{2/3} &= xz^{1/3} - \beta^{1/3} \\ z^2 &= \alpha z - \beta. \end{aligned}$$

Harum prima est *Resolvenda*, tertia est *Resolvens*. Et *intermedia* autem algebraicum *nexum* seu *relationem* inter primam ac tertiam exhibet. Intermediam hanc ergo in posterum aequationem *Relationalem* dicam; dataque *relationali* semper et *resolutio* resolvendae aequationis habetur. Casu praesenti fuit supra $\beta = \frac{a^3}{27}$, vel $\beta^{1/3} = \frac{a}{3}$. Ergo aequatio relationalis (posito $\sqrt[3]{z} = u$) fit:

$$u^2 = xu - \frac{a}{3}, \text{ unde } x = u + \frac{a}{3u}. \text{ (A)}$$

Qua ultima in datam cubicam subrogata prodit *Resolvens* $z^2 = bz - \frac{a^3}{27}$; ut supra. Ex hac habetur z, et ex relationali (A) dein habetur x *ipsa*. Designatur per z, ut supra dixi, vel A vel B. Quemadmodum ergo formula $x = \sqrt[3]{A} + \sqrt[3]{B}$ radicem x per *ambas* A et B exhibet, sic relationalis (A) eandem radicem x promiscue per solam z exhibet. — Potest ergo cossa sublimior generaliter jam] *sic* enunciari:

$$\begin{aligned} &1) \qquad x^m = ax^{m-2} + bx^{m-3} + \ldots + f \\ &2) \qquad F(x,z) = 0. \\ &3) \qquad z^{m-1} = \alpha z^{m-2} - \beta z^{m-3} + \ldots + \pi. \end{aligned}$$

Quaeritur nempe algebraica functio $F(x,z)=0$ talis, ut eliminato x ex (1) et (2), emergat aequatio (3) *resolvens*, quae scilicet unâ dignitate *inferior* existat, quam est *proposita*. Notionem hanc aequationum relationalium (2) probe tibi imprime; quamvis illi in cabbalâ expresse *nihil* superstruam.

§. 2.

Sequitur $x^4=ax^2+bx+c$. Heic positio $x=\sqrt[m]{A}+\dots$ exacte loquendo *non* recte valet, Eulero ipso fatente. Nam ob numerum resolvendae compositum $=4$, simplicior et naturalis resolutio obtinetur ponendo $m=2$, ut fiat:

1) $$x=\sqrt{A}+\sqrt{B}+\sqrt{C}.$$

Eruntque A,B,C radices hujus $z^3=\alpha z^2-\beta z+\gamma$. Sumto istius (1) quadrato fit:

$$x^2-\alpha=2\,[\sqrt{AB}+\sqrt{AC}+\sqrt{BC}].$$

Sumtoque *denuo* quadrato fit:

2) $$x^4=2\alpha x^2+8x\sqrt{\gamma}+4\beta-\alpha\alpha.$$

Quae cum datâ collata praebet $\alpha=\frac{a}{2}$, $\gamma=\frac{bb}{64}$, $\beta=\frac{a^2+4c}{16}$.

Unde resolvens aequatio habetur:

3) $$z^3=\frac{a}{2}\,z^2-\left[\frac{aa+4c}{16}\right]z+\frac{bb}{64}.$$

Nota. Terminus $\sqrt{A}$ *anceps* est, et signat nempe $\pm\sqrt{A}$. Ergo pro (1) ponendo generaliter:

4) $$x=m\sqrt{A}+n\sqrt{B}+r\sqrt{C},$$

literae m,n,r designabunt vel $+1$ vel -1; id est, fit $m^2-1=0$, $n^2-1=0$ $r^2-1=0$. Istam (4) jam prorsus ut superiorem (1) tractando, habebis igitur:

$$x^2-\alpha=2\,[mn\sqrt{AB}+mr\sqrt{AC}+nr\sqrt{BC}];\ \text{et porro:}$$
$$x^4=2\alpha x^2+8mnr\,x\sqrt{\gamma}+4\beta-\alpha\alpha.$$

Quae ergo ut cum istâ (2) coincidat, fieri debet $mnr=1$, id est, valorum m,n,r *duo* debent esse *negativi* $=-1$. Sic ergo ex (4) obtinentur tres radices *reliquae*, ad radicem (1) Conjugatae:

5) $$x=\sqrt{A}-\sqrt{B}-\sqrt{C}$$
$$x=\sqrt{B}-\sqrt{A}-\sqrt{C}$$
$$x=\sqrt{C}-\sqrt{A}-\sqrt{B}.$$

Quaero nunc porro *Relationalem* etiam biquadraticae. Si $p=\sqrt{AB}+\sqrt{AC}+\sqrt{BC}$, tum ex (1) habetur $x^2-\alpha=2p$, vel:

6) $$p=\frac{2x^2-a}{4}$$

Jam sit $u^3-\varphi u^2+\psi u-\vartheta=0$, radicum M,N,R. Ponatur:

$$M=\sqrt{A},\ N=\sqrt{B},\ R=\sqrt{C},\ \text{id est } u=\sqrt{z}.$$

Sic fit $\varphi=\sqrt{A}+\sqrt{B}+\sqrt{C}=x$, $\psi=p$, $\vartheta=\sqrt{\gamma}$. Ergo pro assumta $u^3-\varphi u^2+\psi u-\delta=0$ habetis:

$$z^{3/2}=xz^{2/2}-pz^{1/2}+\gamma^{1/2}.$$

Jam est $\frac{b}{8}=\sqrt{\gamma}$, itemque p ex (6) habetur, ergo quaesita relationalis *praesto* est, et habetur nempe conjugate resolvenda, relationalis et resolvens (7.8.9):

7) $$x^4=ax^2+bx+c$$

8) $$z^{3/2}=xz^{2/2}-\left[\frac{2x^2-a}{4}\right]z^{1/2}+\frac{b}{8}$$

9) $$z^3=\frac{a}{2}\,z^2-\left[\frac{aa+4c}{16}\right]z+\frac{bb}{64}.$$

Intermedia (8) nempe est quaesita functio $F[x,z]=o$. Pone in illâ $z^{1}/_{2}=w$, eamque resolve quoad x. Fiet:

$$10)\qquad x = w \pm \sqrt{\frac{b + 12aw - 4w^5}{4w}}.$$

Hunc valorem in istam (7) introducendo obtinebis *resolventem* (9); et sic ergo denuo natura, usus et efficacia relationalium *patet*. Et nempe haec (10) praestat, quod ista *primitiva* (1) praestiterat. Nimirùm ex (9) habetur z, deinde ex (10) habetur x *ipsa*. — Ejusmodi functio relationalis $F[x,z]=o$ jam praecise est id, quod pro casu *sursolido* ambigitur; quasi scribas:

$$11)\qquad x^5 = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

$$12)\qquad F[x,z] = o.$$

$$13)\qquad z^4 = \alpha z^3 - \beta z^2 + \gamma z - \delta.$$

§. 3.

Eulerus, cum ad positionem $x=\sqrt[5]{A}+\ldots$ nihil quidquam calculorum salubrium adinvenisset, in Nov. Comment. Petrop. T. IX ad *secundam* quidem hypothesin confugit, sed quae quoad summam rei prorsus cum priori *coincidit*. Assumit enim formam denuo *Quadrimembrem*:

$$1)\qquad x = \mathfrak{A} + \mathfrak{B} + \mathfrak{C} + \mathfrak{D}.$$

At vero huic jam inconsulte quendam characterem cossicum tribuit, quo et Sibi et posteris in cossae damnum et ruinam *illusit*. „Posito (inquit enim,) radicem unam esse $x=\sqrt[5]{A}+\ldots$, quomodo jam *reliquas* radices quatuor distinguam? Si $t^5-1=o$ habet radices 1,m,n,r,k, et ergo ponatur promiscue:

$$x = m\sqrt[5]{A} + n\sqrt[5]{B} + r\sqrt[5]{C} + k\sqrt[5]{D},$$

haec repraesentabit utique radices *reliquas* quatuor. At vero heic literae m,n,r,k admittunt permutationes non *quatuor* tantum, sed quatuor et *viginti*, ut ergo viginti earum superfluae et imo *spuriae* censendae sint." — Et sic ergo Eulerus ad *secundam* hypothesin descendit. Nempe cum sit $n=m^2$, $r=m^3$, $k=m^4$, Eulerus praeter primitivam radicem (1) assumsit ordinatas potentias:

$$2)\qquad x = m\mathfrak{A} + m^2\mathfrak{B} + m^3\mathfrak{C} + m^4\mathfrak{D},$$

et similiter pro n, r, k, reliquis. Oriebantur sic omnino ergo quinque valores, et videbatur sibi Eulerus, virtute hujus astutiae, valores istos 20 superfluos debite *exclusisse* vel in *Exilium* misisse. — At vero res haec omnino *secus* cadit, et abstrusissima haec radicum distinctio *Cabbalam* nostram expectat. Ceterum *Tschirnhusii* quoque methodum a Lagrangio constat ingeniosissime ad formam Euleri *quadrimembrem* esse reductam:

$$x = \sqrt[5]{\vartheta'} + \sqrt[5]{\vartheta''} + \sqrt[5]{\vartheta'''} + \sqrt[5]{\vartheta^{\text{IV}}}.$$

In quo negotio autem Lagrangius quoad radicum distinctionem in eundem prorsus cum *Eulero* errorem incidit.

§. 4.

Sequitur nunc *theorema* de transformationibus algebraicis, (quod exhibui primus in *Arte Cossae* §. 41, et cujus illustria specimina ocourrent *infra*.) — Transformationes generaliter sic exponi possunt:

$$1)\qquad x^{m} = ax^{m-1} + bx^{m-2} + \ldots + f.$$

$$2)\qquad F[x,z] = o.$$

$$3)\qquad z^{n} = \alpha z^{n-1} - \beta z^{n-2} + \ldots \pm \pi.$$

Mediante *Secunda* nempe fit transformatio primae in *Tertiam*. (Si praecise foret vel requireretur $n=m-1$, tum transformatio foret *resolutoria*. Sed nunc *universaliter* prorsus loquor.) — Ipsius

$F[x,z] = o$ existet jam Differentiale $Pdx + Qdz = o$; ergo x in (1) et z in (3) ad invicem sunt Variabiles, quarum lex dependentiae per (2) exhibetur. Ex ista (1) jam et ex ejusdem differentiali eliminetur x; deinde ex (3) et ex ejusdem differentiali eliminetur z. — „Functionum sic emergentium:

4) $\Phi'[a,b,\ldots f] = o \qquad \Phi''[\alpha,\beta\ldots\pi] = o$

natura jam (ob relationem $F[x,z] = o$ intercedentem) ita comparata est, ut ambae hae (4) vel *ultro* consentiant et coincidant vel saltim communem *divisorem* agnoscant.“ — Theorema hoc est ex pulcherrimis et maxime Essentialibus algebrae; ergo illud exemplis aliquot illustrabimus. Sit:

5) $x^2 = ax - b$

6) $x - \sqrt{z} = o$

7) $z^2 + [2b - aa]z + bb = o.$

[Mediante (6) nempe prima (5) transit in tertiam (7)]. — Ex harum prima, (sumendo differentiale, et eliminando deinde x) habetur $aa - 4b = o$; ex *tertia* (per similem processum) fit $a^2[a^2 - 4b] = o$. Ergo constat propositum. — Sit porro:

$$x^3 = ax + b$$

$$x - \sqrt{z} = o$$

$$z^3 - [a^3 + 3ab]z - b^3 = o.$$

Ex harum prima obtinetur $aa + 4b = o$; ex tertia autem:

$$4b^3 + 9a^2b^2 + 6a^4b + a^6 = o,$$

quae vero factorem habet $aa + 4b = o$, ut praedixi. Sit porro resolutio Cardani (§. 1. Nro. 5):

8) $x^3 = ax + b$

9) $u^2 = xu - \frac{a}{3}$

10) $u^6 = bu^3 - \frac{a^3}{27}.$

Ex prima habetur $27bb - 4a^3 = o$. Et idem habetur ex *Tertia*. Denique sit resolutio Biquadratica (§. 2, Nro. 7-9):

11) $x^4 = bx + c$

12) $u^3 = xu^2 - \frac{xx}{2}u + \frac{b}{8}$

13) $u^6 + \frac{c}{4}u^2 - \frac{bb}{64} = o.$

Ex prima obtinetur $256c^3 + 27b^4 = o$; et idem quoque ex *tertia*. — Similiter quovis alio casu. — Vice versa si duae aequationes vel functiones occurrunt, applicando criterio nostro detegetur, utrum a se invicem dependeant, nec ne. — Ceterum theoremate hoc in cabbala expresse non utar.

§. 5.

Venio nunc ad methodos *differentiales* cossicas. Sit (1) $x^2 = ax + y$, et $2x - a = \frac{dy}{dx}$, ergo x ejiciendo:

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{[aa + 4y]}, \text{ unde } 2x = \pm\sqrt{[aa + 4y]} + C.$$

Jam in (1) fit $x = a$ pro $y = o$, ergo $C = a$ vel $C = 3a$. Sed in (1) fit porro $x = o$ pro $y = o$, ergo $C = \pm a$. Eligendus est ergo pro C valor utrique determinationi *communis*, qui est $C = + a$. Potest et *alia* variabilis adhiberi ponique $x^2 = ux + b$, et resolutio similiter procedit.

Jam porro sit $x^3 = ax + y$; et differentiando $3x^2 - a = Q$. Haec scribendi ratio probe notetur; nempe semper intelligi $\frac{dy}{dx} = Q$. Eliminato x fit $Q^2[Q - 3a] = 27yy - 4a^3$. „Hoc in *omni* gradu resolvendae sic accidit; ut nempe factor quadraticus Q^2 appareat, et infima nimirum dignitas Q ex

calculo *abeat*." — Sequitur ergo regula *cossica generalis:* „Ex resolvenda et ex ejus differentiali eliminabis x. Prodibit functio factorem QQ ostendens dicto sensu. Pro factore hoc repone $\frac{dy^2}{dx^2}$. Pars quae *intra* uncinos est, (in casu praesenti igitur $Q-3a$), continebit literam Q, plerumque etiam literam y; sed est $Q=3x^2-a$, et est $y=x^3-ax$, ergo quod intra uncinos est, semper per merum x potest exprimi. Quo ita facto, aequatio differentialis *finalis* ante oculos erit. — Casu praesenti habebis

$$\frac{dy^2}{dx^2}[3x^2-4a]=27yy-4a^3, \text{ vel:}$$

$$\frac{\pm dy}{\sqrt{[27y^2-4a^3]}}=\frac{\pm dx}{\sqrt{[3x^2-4a]}}. \quad (A.)$$

Est autem generaliter:

$$\int\frac{\pm du}{\sqrt{[mu^2-n]}}=\frac{1}{\sqrt{m}}\log[u\sqrt{m}\pm\sqrt{(mu^2-n)}], \text{ ergo pro + signo:}$$

$$\frac{1}{3\sqrt{3}}l[3y\sqrt{3}+\sqrt{(27y^2-4a^3)}]=\frac{1}{\sqrt{3}}l[x\sqrt{\cdot}+\sqrt{(3x^2-4a)}]+\frac{lC}{\sqrt{3}}.$$

Ubi erit $^3lC=-l4$. Hinc:

$$\sqrt[3]{4}[3y\sqrt{3}+\sqrt{(27y^2-4a^3)}]=x\sqrt{3}+\sqrt{(3x^2-4a)}.$$

Similem jam habebis pro — signo; et has ambas addendo fiet:

$$x=\sqrt[3]{\left[\frac{y}{2}+\sqrt{\left(\frac{yy}{4}-\frac{a^3}{27}\right)}\right]}+\sqrt[3]{\left[\frac{y}{2}-\sqrt{\left(\frac{yy}{4}-\frac{a^3}{27}\right)}\right]}.$$

Sit porro $x^3=ux+b$, ergo $u=\frac{x^3-b}{x}$. Ex hac ultima et ejus differentiali ejiciatur x, fietque:

$$\frac{du^2}{dx^2}\left(\frac{bdu}{dx}-u^2\right)=27bb-4u^3.$$

Per dictam regulam generalem id, quod intra uncos est, exprimatur per x, et habebitur:

$$\frac{du}{\sqrt{(27b^2-4u^3)}}=\frac{dx}{\sqrt{(4bx-x^4)}}. \quad \textit{Non integrabile!} \quad (B)$$

Et hic vide quaeso, quam manca sit *integrandi* ars! Nimirum integratio (et inde pendens resolutio) cubicae procedit vel *non* procedit, prout in cubica $x^3=ax+b$ secundum vel *primum* coefficientem pro variabili tractas. Eo magis necesse est, lectores ad miras indigitationes (Arte Cossae §. 6—13) ablegare, praesertim cum recens mihi profundius constet, rem integralem tum ex his *Cossicis* tum ex aliis quibusdam principiis mihi consciis totam sui Reformationem et novam Auroram expectare. — Egregium est autem observare, quod supra pro $x^3=ax+y$ integratio *supersederi* possit. Nempe in ista (A) repone $dy=(3x^2-a)dx$, fietque:

$$3)\qquad [3x^2-a]\sqrt{[3x^2-4a]}=\sqrt{[27y^2-4a^3]}.$$

Jam (Diophanteo more) ponendo $\sqrt{[3x^2-4a]}=x\sqrt{3}-u$, ergo $x=\frac{4a+u^2}{2u\sqrt{3}}$, pulchre succedit resolutio *Cardani* (l. cit. §. 8). Et pulchrum est observare, quomodo ars Cossica, ars Diophanti et ars integrandi inter se cohaereant. — Casus ille *difficilior* (B) autem, seu integrando impos, quanquam separate *non* habeatur integratio:

$$4)\qquad V=\int\frac{du}{\sqrt{(27b^2-4u^3)}} \text{ et } V=\int\frac{dx}{\sqrt{(4bx-x^4)}},$$

integrale tamen *habet*, nam ipsa $x^3=ux+b$ perfectum ejus integrale est. Quare si vel *impossibiles* forsan sint separatae integrationes (4), existere saltim debet methodus, dato elemento (B) ad integrale hoc $x^3=ux+b$ perveniendi. At id secus fit. Nam si cui Analystae meram (B) proponis, ille et *Se* et scientiam fatebitur *imparem*; siquidem unice ad *separatas* (4) integrationes mentem diriget. Et

sic Tantali instar, ab integrali $x^3 = ux + b$ *seclusus* manet, imo de hoc integrali tam simplici et quasi in vicinia posito ne *suspicionem* quidem habet. — Quo titulo igitur hodierna integrandi ars denuo mire prostituitur.

§. 6.

Sequitur $x^4 = ax^2 + bx + y$, ergo $4x^3 - 2ax - b = Q$; et x ejecto:

1) $$256y^3 + 128a^2y^2 + (16a^4 - 144ab^2)y + 27b^4 - 4a^3b^2 = Q^2[Q^2 - 8abQ + 18b^2 - 4a^3 - 16ay].$$

In ultimo membro, termini Q et y intra uncos conspicui exprimantur per x, deinde pro factore Q^2, qui *extra* uncos est, ponatur $\frac{dy^2}{dx^2}$, et jam aequatio differentialis *finalis* ante oculos erit hujus formae:

2) $$\frac{dy}{\sqrt{Y}} = \frac{dx}{\sqrt{X}}.$$

Similiter pro omni superiori gradu. Qui calculos fugit, is jucundissime rem pro casu saltim simplici $x^m = ax + y$ experiatur. Et sic ergo pro omni aequatione algebraica existit formula (2) tanquam *Character differentialis Cossicus*. In ista (2) nempe Y est functio algebraica solius variabilis y, et X autem functio solius x. Experiare quaeso rem, (quo magis assuescas), in casu, quem dixi, *simplici*, pro numeris aliquot $m = 2, m = 3, m = 4, m = 5$. Caeterum ista (2) facile etiam secundum *dimensiones*, ad quas adscendit, exhibetur. Nempe pro $x^m = ax^{m-2} + bx^{m-3} + \ldots + y$ aequatio dicta (2) seu Character cossicus facili ratiocinio deprehenditur *hujus* formae esse:

3) $$\frac{dy}{\sqrt{[A + By + Cy^2 + \ldots + My^{m-1}]}} = \frac{dx}{\sqrt{[\mathfrak{A} + \mathfrak{B}x + \mathfrak{C}x^2 + \ldots + \mathfrak{M}x^{(m-1)(m-2)}]}}.$$

Et ad hanc *Integrationem* igitur theoria resolutionis aequationum reducitur! — Sed integratio succedit nonnisi pro casu *cubico*; ibi nimirum est $m - 1 = 2$, et $(m-1)(m-2) = 2$. Casu *biquadratico* autem fit $My^{m-1} = My^3$; quo casu ista (3) non integratur. Et memorabile est ergo, quod ars integrandi ne cum *Cossa* quidem parem gressum tenere potuerit. Biquadratica enim insoluta manet *Integristae*, dum ~~tamen solvatur a *Cossista*~~. — Pro casu porro Sursolido fit $My^{m-1} = My^4$; ergo prodit elementum:

4) $$\frac{dy}{\sqrt{[A + By + Cy^2 + Dy^3 + Ey^4]}},$$

a quo rectificatio *Conicarum* pendet, ut scimus.

§. 7.

Mutandi discursus causa hic alia quaedam cossica inventa mihi domestica subjungam. — Sit $x^2 = ax + y$. Adde utrinque $-2ux + u^2$, ~~fietque~~:

$$x - u = \sqrt{[(a - 2u)x + u^2 + y]}.$$

Ut ergo x ad sinistram innotescat, necesse est evanescere ad *dextram*, quidquid literam x continet. Ergo $a - 2u = 0$, vel $u = \frac{a}{2}$. Sic fit Resolutio. — Porro huic $x^3 = ax + y$ utrinque addatur $-3ux^2 + 3u^2x - u^3$, unde fit:

1) $$x - u = \sqrt[3]{[(a + 3u^2)x - 3ux^2 - u^3 + y]}.$$

Evanescant hic iterum sub radicali partes literam x continentes, ut fiat $a + 3u^2 - 3ux = 0$, vel:

2) $$u^2 = xu - \frac{a}{3}; \text{ (§. 4. Nro. 9)}$$

prodit ergo cubicae Relationalis; qua data, datur cubicae *resolutio*. Ex (2) nempe ponatur $x = u + \frac{a}{3u}$ in priorem (1), id est in

$x-u=\sqrt{[y-u^3]}$, prodit:

$\frac{a}{3u}=\sqrt{[y-u^3]}$ vel $u^6=yu^3-\frac{a^3}{27}$; nempe Resolvens. — Addo breviter casum saltim $x^4=bx+y$, posito $a=o$. Deduxi ex theoria cossae, addendum utrinque esse $-4ux^3+8u^2x^2-8u^3x+4u^4$. Sic fiet:

1) $$x^2-2ux+2u^2=\sqrt{[y+4u^4+x(b-8u^3+8u^2x-4ux^2)]}.$$

Hic ergo ad exstinguendum destinatur $b-8u^3+8u^2x-4ux^2=o$, seu:

2) $$x^2-2ux+2u^2=\frac{b}{4u}.$$

Loco istius (1) autem remansit:

3) $$x^2-2ux+2u^2=\sqrt{(y+4u^4)}.$$

Jam aequandis (2) et (3) fit (4) $u^6=-\frac{y}{4}u^2+\frac{bb}{64}$; *resolvens* nempe, (§. 2, Nro. 9). Sic ex (4) habetur u, ergo ex (2) habetur x. Haec (2) nempe scribi potest:

4) $u^3=xu^2-\frac{xx}{2}u+\frac{b}{8}$. *Relationalis* nempe! (loco cit). —

Sed est mihi peculiaris methodus alia biquadraticam resolvendi, qua mira ejus affinitas cum *quadratica* elucet. Tractabo brevitatis causa casum $x^4=bx+y$. Ponatur more quadraticae, radix $x=p+\sqrt{q}$. Ergo:

5) $$p^4+q^2+6p^2q+[4p^3+4pq-b]\sqrt{q}=bp+y.$$

Ponatur pars irrationalis seorsim $=o$; eritque:

6) $$4p^3+4pq-b=o.$$

7) $$p^4+q^2+6p^2q=bp+y.$$ Ejecto q fiet:

8) $$p^6=-\frac{y}{4}p^2+\frac{bb}{64}.$$ Quae est *Resolvens.*

Ex (6) habetur $q=\frac{b-4p^3}{4p}$, ergo loco $x=p+\sqrt{q}$ fit:

$$x=p+\sqrt{\frac{b-4p^3}{4p}},$$ vel reducendo:

$$p^3=xp^2-\frac{xx}{2}p+\frac{b}{8};$$ quae est Relationalis.

Sequitur *porro* ex domesticis quid. — Sit $x^3=ax+b$, radicum p, q, r. Dividendo per $x-p$ fit:

$$p^2+xp+x^2=a.\quad \text{Ergo } 2p=-x+\sqrt{[4a-3xx]}.$$

Heic pars irrationalis rationalisetur Diophanteo more, ponendo

$$\sqrt{[4a-3xx]}=x\sqrt{-3}+t.\quad \text{Sic fit } x=\frac{4a-t^2}{2t\sqrt{-3}};$$

id est $t^2+2xt\sqrt{-3}=4a$, vel (posito $t=-2u\sqrt{-3}$) fiet:

$u^2=xu-\frac{a}{3}$; *relationalis* cubicae. — Datâ autem relationali datur propositae *resolutio*; nempe ex relationali valorem x in propositam introducendo. — Denique sit $x^4=ax^2+bx+c$, radicum m, n, p, q. Dividendo per $x-m$ fit:

$$x^3+mx^2+(m^2-a)x+m^3-am-b=o.$$

Dividendo porro per $x-n$ fit:

9) $$x^2+(m+n)x+m^2+n^2+mn-a=o.$$

Jam ex $m+n+p+q=o$ et $mnp+\ldots=b$ ejecto q fit:

$$[m+n]p^2+[m+n]^2p+mn[m+n]+b=o,$$ vel (permutatis x et p):

10) $$[m+n]x^2+[m+n]^2x+mn(m+n)+b=o.$$

In hanc imponatur valor mn ex (9), fietque:

$$2(m+n)x^2+2(m+n)^2x+(m+n)^3-a(m+n)+b=o;$$

positoque $m+n=-2u$ erit: (M.)

11) $u^3 = xu^2 - \left[\frac{3x^2 - a}{4}\right] u + \frac{b}{8}$. *Relationalis* nempe. (§. 2, Nro. 8.)
Quâ nempe datâ datur propositae *resolutio*. Similem omnino resolutionem infra praebebit *Cabbala.* — Valde memorabilis etiam biquadraticae resolutio, (nempe per *Cubicae* aequationis rationalisationem) prostat in Philos. cossica (§. 16 seqq.) — Saltim qui Commentari in hoc Cabbalae opus volet, nostra priora Scripta utique debet ad manum habere.

§. 8.

Post has ferias jam ad nostram $\frac{dy}{\sqrt{Y}} = \frac{dx}{\sqrt{X}}$ revertimur, quam jure algebraicarum aequationum *fundamentum differentiale* seu *Characterem cossicum* dixi. Et jam ergo illius *Theoria* exhibenda est; quae theoria *duas* partes habet. Primo enim functionum Y et X mutua inter *Se* relatio seu dependentia exponi debet. (Quo magis autem rebus adsuescas, intuere prius attente *formam* characteris cossici, quae forma supra §. 6, Nro. 3, ante oculos est.) — Huic scopo repone in charactere cossico valorem $dy = Qdx$, et character induet jam formam:

1) $$\sqrt{Y} = Q\sqrt{X}.$$

Et jam dependentia inter Y et X pulchre ante *oculos* est. (Ad rem illustrandam autem utar exemplo *Cubicae* $x^3 = ax + y$). Functio Y nempe ergo *ita* comparata est, ut reponendo in illa valorem $y = x^3 - ax$, oriatur Q^2X, id est functio, quae termini differentialis $Q = 3x^2 - a$ *quadratum* pro *Factore* habeat. Et sic ergo (pro quavis datâ $x^m = ax^{m-2} + \ldots$) ex datâ Y sponte *innotescit* functio respondens X. In ista Y nempe repone $y = x^m - ax^{m-2} - \ldots$; quod prodit, jam divide per $(mx^{m-1} - (m-2)\,ax^{m-3} - \ldots)^2$ seu per QQ, et quod remanet, est X. Praesenti casu est $Y = 27yy - 4a^3$. In hac repone $y = x^3 - ax$, dein divide per $(3x^2 - a)^2$; quod remanet, est $X = 3x^2 - 4a$. (Vid. §. 5, A.) — Jucunditatis tuae causa suadeo, ut rem ad casum saltim simplicem $x^m = ax + y$ pro $m = 2$, $m = 3$, $m = 4$, $m = 5$ experiare. — Demonstratâ hac *mutua* inter Y et X dependentiâ, succedit *posterior* theoriae pars, investigare nempe, quaenam functionum Y et X per se *singularum* natura vel significatio sit. Quae res ultra modum et *pulchra* et *decisiva* est. Accipe ergo, *quamnam* praecise personam irrationales hae functiones $\sqrt{Y}$ et $\sqrt{X}$ in cossa *sustineant*. Cum enim character cossicus:

2) $$\frac{dy}{\sqrt{Y}} = \frac{dx}{\sqrt{X}}$$

uniformiter pro *omni* gradu $x^m =$ etc. obtineatur, (differentiando nempe, deinde x eliminando,) ergo functiones $\sqrt{Y}$ et $\sqrt{X}$ non modo personam *eandem* pro omni gradu resolvendae sed et imo *decisivam* sustinebunt, et prorsus *ejusdem* categoriae pro omni gradu erunt, et internam omnino aequationum algebraicarum quasi *Compagem* concernere debent. — Quem dictarum functionum significatum cossicum ergo nunc accipe. — Pro cubica $x^3 = ax + y$ est:

3) $$\sqrt{Y} = \sqrt{[27yy - 4a^3]}. \quad (§. 5. A).$$

Jam ex cubicae resolvente $z^2 = yz - \frac{a^3}{27}$, sequitur resolvendo irrationale $\sqrt{\left[\frac{yy}{4} - \frac{a^3}{27}\right]}$; quod scribi potest $= m\sqrt{[27yy - 4a^3]}$, ubi $m = \frac{1}{6\sqrt{3}}$. Et sic ergo nostrum $\sqrt{Y}$ designat „irrationalem terminum in cubicae *Resolvente* latentem!“ — Porro pro cubica habuimus (loco cit.):

4) $$\sqrt{X} = \sqrt{[3xx - 4a]}.$$

Jam intuenda est *Relationalis* cubicae, quae est (posito $\sqrt{z} = u$) $u^2 = xu - \frac{a}{8}$. (§. 4, Nro. 9) quae resolvendo offert irrationale $n\sqrt{[3xx - 4a]}$, ubi $n = \frac{1}{2\sqrt{3}}$. Ecce ergo praecise functionem $\sqrt{X}$ (4)! Et designat ergo functio $\sqrt{X}$ praecise „irrationalem terminum in cubicae *Relationali* latentem!“ —

Et sic ergo denominatorum elementi $\frac{dy}{\sqrt{Y}} = \frac{dx}{\sqrt{X}}$ nexus cum functionibus cubicae resolventibus mire et pulchre patet.

§. 9.

Transeo ad $x^4 = bx + y$, (ponendo $a = o$, qui casus hic sufficit:) — Pro hac habetur Character cossicus (per dictam §. 5 regulam) *hic*:

$$1)\qquad \frac{dy}{\sqrt{[256y^3 + 27b^4]}} = \frac{dx}{\sqrt{[16x^6 - 40bx^3 + 27bb]}}.$$

Ad hos denominatores $\sqrt{Y}$ et X examinandos examinanda est biquadraticae $x^4 = bx + y$ *resolvens*:

$$2)\qquad z^3 = -\frac{y}{4}z + \frac{bb}{64}.\quad (§. 7, \text{Nro. } 8).$$

Cujus cubicae porro resolvens quadratica est:

$$w^2 = \frac{bb}{64}w + \frac{y^3}{27.\ 64}.\quad (§. 1).\quad R.$$

Haec resoluta offert irrationalem terminum $m\sqrt{[256y^3 + 27b^4]}$, ubi $m = \frac{1}{48\sqrt{3}}$. Ecce hic denuo praecise functionem $\sqrt{Y}$ in Charactere *cossico* (1) conspicuam! — Et superest ergo unice, ut valorem $\sqrt{X}$ quoque examinemus. Aequatio relationalis aequationis propositae $x^4 = bx + y$ est:

$$u^3 = xu^2 - \frac{xx}{2}u + \frac{b}{8}.\quad (§. 7, \text{Nro. } 4.)$$

Ex hac eliminetur membrum secundum, et cubicae sic prodeuntis $T^3 = \pi T + \delta$ sumatur aequatio *resolvens*. Quae erit:

$$w^2 = \left[\frac{b}{8} - \frac{6x^3}{64}\right]w + \frac{x^6}{27.\ 6^6}.$$

Haec resoluta offert irrationalem terminum:

$$\sqrt{[16x^6 - 40bx^3 + 27bb]}.$$

Ecce ergo praecise *characterem* $\sqrt{X}$ (Nro. 1) conspicuum! Et sic patet ergo, quid in characteristica $\frac{dy}{\sqrt{Y}} = \frac{dx}{\sqrt{X}}$ isti $\sqrt{Y}$ et $\sqrt{X}$ *designent*. Designant nempe ~~ultimum terminum irrationalem~~ irrationalem, a quo resolutio datae aequationis tandem *pendet*. Et quidem expresse designat $\sqrt{Y}$ terminum ultimum irrationalem *Resolventis*, et $\sqrt{X}$ designat ultimum terminum irrationalem aequationis *Relationalis*. Et sunt hae Y et X ita comparatae, ut casus *superior* omnes casus *inferiores* involvat. Nempe si pro $x^m = ax^{m-1} + \ldots + y$ nostram finalem $\frac{dy}{\sqrt{Y}} = \frac{dx}{\sqrt{X}}$ concinnatam esse ponas, tum pro $m = 2$, $m = 3$ et porro, *omnes omnis* gradus functiones finales $\sqrt{Y}$ et $\sqrt{X}$ ~~obtinebis~~. Res eleganter ad casum $x^m = ax + y$ accommodatur. Pro hac enim (attendendo nempe unice ad membrum $\sqrt{Y}$) obtinetur:

$$\frac{dy}{\sqrt{[m^m y^{m-1} \pm (m-1)^{m-1} a^m]}} = \frac{dx}{\sqrt{X}}\qquad L.)$$

in qua valet $+$ pro m pari, $-$ pro m impari. Jam ponendo successive $m = 2$, $m = 3$, ... oriuntur termini:

$$\frac{dy}{\sqrt{[4y + aa]}},\ \frac{dy}{\sqrt{[27y^2 - 4a^3]}}\ \text{et porro.}$$

Et pulchrum est videre, quod irrationale $\sqrt{(4y + aa)}$ ad quadraticam $x^2 = ax + y$ pertinens, non sit nisi *ultimus* vel infimus casus irrationalium finalium, a quibus hujus $x^m = ax + y$ resolutio tandem pendet. Similiter ergo si nostram $\frac{dy}{\sqrt{Y}} = \frac{dx}{\sqrt{X}}$ pro *generali* $x^m = ax^{m-1} + bx^{m-2} + \ldots + y$ concin-

natam fingas, tum ponendo $m=2$, $m=3$, ... omnes omnium graduum ultimi characteres irrationales $\sqrt{Y}$ et $\sqrt{X}$ haberentur *simul* vel *uno* actu. — Sic verbi causa pro $x^5 = ax + y$ habebitur:

3) $\sqrt{Y} = \sqrt{[5^5 y^4 - 4^4 a^5]}$

4) $\sqrt{X} = \sqrt{[125 x^{12} - 450 ax^8 + 535 a^2 x^4 - 256 a^3]}$.

Ab his (3. 4) ergo, sursolidae hujus resolutio tandem *pendet*; nempe ejus *resolvens* (in ultima sua reductione ad quadraticam) offeret irrationalem terminum (3), et ejusdem *relationalis* (in ultima sua reductione ad quadraticam) offeret irrationalem terminum (4). — Ceterum cum termini $\sqrt{Y}$ et $\sqrt{X}$ habeant significatum absolute eum, quem exposuimus, haec ipsa causa est, cur character finalis *idem* semper prodeat, *quicunque* tandem alius coefficiens u, loco ipsius y^0 variabilis ponatur. Casu hoc solummodo vigebit scriptio:

$$\frac{du}{\sqrt{U}} = \frac{dx}{\sqrt{X}}.$$

Formula enim haec *ipsa*, semper manet *eadem*, quamcunque tandem variabilem y, vel u ... involvat. Sic pro:

$x^2 = ax + y$ fuit $\sqrt{Y} = \sqrt{[4y + aa]}$; pro

$x^2 = ux + b$ fuit $\sqrt{U} = \sqrt{[4b + uu]}$.

Similiter casu *cubicae*; ibi enim (§. 5, A) pro:

$x^3 = ax + y$ fuit $\sqrt{Y} = \sqrt{[27yy - 4a^3]}$, et pro:

$x^3 = ux + b$ fuit $\sqrt{U} = \sqrt{[27bb - 4u^3]}$. (ibid. B.)

Quum autem aequatio nostra catholica $\frac{dy}{\sqrt{Y}} = \frac{dx}{\sqrt{X}}$ ejus naturae sit, ut $\sqrt{Y}$ et $\sqrt{X}$ designent functionem ultimam irrationalem, a qua aequatio *resolvens* et *relationalis* respective tandem pendet, ideo hae $\sqrt{Y}$ et $\sqrt{X}$ pro vero *Criterio* cossae habendae sunt. Quum enim haec ambo criteria pro *omni* gradu aequationis resolvendae in promtu sint, ergo si quis v. c. pro casu sursolido aliquam novam Hypothesin in medium afferat, vel Relationalem quamcunque $F(x, z) = 0$, tum ea criterio nostro *catholico* tanquam lapidi *Lydio* subjiciatur, et examinetur, num genuina et criterialis functio $\sqrt{X}$ finaliter in illâ lateat. Sin *secus* acciderit, functio $F(x, z) = 0$ sponte cadit et pro *spuriâ* et resolvendae sursolidae *inepta* censeri debet. Exempla rei infra occurrunt.

§. 10.

Functionibus $\sqrt{Y}$ et $\sqrt{X}$ autem porro nunc lux adfundenda est ex *alio* principio. Cohaerent nempe haec irrationalia cum radicibus aequationum *imaginariis*, et in harum investigatione necessario et sponte *occurrunt*. Vel aliis verbis; Si in resolvendâ ponatur $y = max.$, et jam x ex datâ eliminetur ope differentialis, tum praecise et pro omni gradu prodit nostra functio Y, sed sub forma $Y = 0$; quae nempe *Maximi* statum designat. Verbi causa ex $x^3 = ax + y$ et $3x^2 = a$, ejecto x, prodit $27yy - 4a^3 = 0$ id est $Y = 0$; (et ob $Y = Q^2 X$ simul et habetur functio X, ut supra dixi) — Casu hoc Maximi est $dy = 0$, sed $dy = Qdx$ (§. 5), ergo et $Q = 0$. Docuique in Cardano Suevo, hoc Maximi casu *omnes* tres functiones evanescere, fierique *simul*:

$$Y = 0 \qquad Q = 0 \qquad X = 0.$$

Quum autem haec res ad cabbalam immediate non spectat, solam *Regulam* subjungam; quae ex hactenus dictis sponte intelligitur. Si verbi causa $x^m = ax + y$ differentietur pro $dy = 0$, ejecto jam x prodit $Y = 0$. Aequatiunculae dictae resolventem $z^{m-1} = \alpha z^{m-2} - \ldots$ similiter differentiando pro $dy = 0$, et ejiciendo deinde z, conspicua denuo prodibit $Y = 0$. Praecedentis resolventem $w^{m-2} = \pi w^{m-3} - \ldots$ *denuo* sic tracta, et denuo prodibit $Y = 0$. Et sic deinceps retro, donec ad *ultimam* resolventem $u^2 = \lambda u - \vartheta$ perveneris; quae *denuo* sic tractata, denuo sistet istam eandem $Y = 0$. Nempe quadratica haec *finaliter* jam continet irrationalem terminum $\sqrt{Y}$, sed jam sub formâ $Y = 0$, ob as-

sumtum $dy = o$ vel statum *Maximi.* — At ut *relationales* $\left[\text{verbi causa } u^2 = xu - \frac{a}{8}\right]$ ad hunc Maximi statum adornentur, eae differentiandae sunt pro $dx = o$, dein ejecto u. prodit $X = o$, nempe functio criterialis *altera*; sed sub forma $= o$. Similiter et relationalium *retro* resolventes (siquidem adsint), subinde tractabis (prorsus ut casu priori seu $dy = o$), et prodibit semper illa eadem $X = o$. Jucunditatis tuae causa suadeo, ut rem in casibus hactenus tractatis experiaris, (qui casus et aequationes uno acervo §. 4, Nro. 8—13 ante oculos existunt.) Similiter experiaris rem in ambabus (§ 9, Nro. 3 et 4), quae sunt nempe *retro* resolventes. Nancisceris *his* quoque ambobus casibus, respective legitimos $Y = o$ et $X = o$.

Quoniam autem criteria duo haec $\sqrt{Y}$ et $\sqrt{X}$ tanti momenti sunt, et quasi utramque paginam in cossa absolvunt, ideo (Philos. Coss. §. 7—9) indigitavi *continuationem* etiam hujus statūs Maximi. Nimirum si verbi causa $x^5 = ax^3 + bx^2 + cx + y$, tum pro $y = $ Max. fit:

1) $$5x^4 = 3ax^2 + 2bx + c.$$

Haec jam ad casum $c = $ Max. adaptata, differentiata ejecto deinde x, praebet criterium *secundarium*, inter a, b, c, solos. — Dein istam (1) *denuo* differentiando:

2) $$10x^3 = 3ax + b.$$

Haec ad $b = $ Max. adaptata et differentiata, ejecto deinde x, praebet criterium *tertium*, inter solos a, b. Similiter jam etiam tum *resolventem* tum *relationalem* tractabis continuata differentiatione, et sic ergo pro:

3) $$x^m = ax^{m-1} + \ldots + y$$

4) $$F(x, z) = o$$

5) $$z^{m-1} = \alpha z^{m-2} - \ldots \pm \pi$$

oriuntur seu existunt criteriorum quasi *ordines*:

3)	4)	5)
$A = o$	$X = o$	$Y = o$
$A' = o$	$X' = o$	$Y' = o$
$A'' = o$	$X'' = o$	$Y'' = o$, ...

ubi numeri (3. 4. 5) praecedentibus (3. 4. 5) respondent. At haec indigitare satis est, quia immediate non spectant ad cabbalam.

§. 11.

Simili causa nunc alia quaedam, saltim Historice commemorabo, tum ut summarie sciant lectores, quae prius olim a me inventa fuerint, tum quia ea, quae nunc sequuntur, post veram cabbalae theoriam nunc inventam, eventu jam praeclare comprobata sint, et ideo pateat, quam singularia cossae inventa jam ante longam annorum seriem in Cardano meo typis vulgata fuerint. Nec id vanitatis causa (quippe quod omnibus titulis et unice contemnendum duco), — sed quia Cardani libellus in Germania quasi penitus in *Incognito* manserit. — Aequatio criterialis nostra $\frac{dy}{\sqrt{Y}} = \frac{dx}{\sqrt{X}}$ in terminis Y et X meros *integros* numeros, et nusquam fractos continet; id quod ex *genesi* dictae aequationis patet sic fieri debere. Et edocent id *actu* quoque omnes Y et X hactenus a nobis exhibitae. At in aequationibus *ipsis*, hae Y et X utique semper sub forma *fracta* apparent; id quod pariter supra exemplis (§. 8 et 9) pluribus vidimus. Sic pro $x^m = ax + y$ habetur:

$$\frac{dy}{\sqrt{Y}} \text{ vel } \frac{dy}{\sqrt{[m^m y^{m-1} \pm (m-1)^{m-1} a^m]}}. \quad (\S. 9. \text{ L.})$$

Quod pro $m = 2$ praebet $\sqrt{Y} = \sqrt{[4y + aa]}$. At in quadratica $x^2 = ax + y$ terminus is continetur sub forma *fracta* $= \sqrt{\left[y + \frac{aa}{4}\right]}$. — Similiter pro $m = 3$, seu $x^3 = ax + y$, praecedens (§. 9. L.)

praebet $\surd Y = \surd[27y^2 - 4a^3]$. Sed in cubicae resolvente $z^2 = yz - \frac{a^3}{27}$ vidimus eundem terminum sub *fracta* apparere $= \surd\left[\frac{yy}{4} - \frac{a^3}{27}\right]$. Quare docui in Cardano, praecedentem formulam (§.9.L.) induere debitam *fractam* formam, si Y per productum coefficientium numericorum *dividatur*. Sic habebitur:

$$\overset{ay}{\overline{\surd\left[\frac{y^{m-1}}{(m-1)^{m-1}} \pm \frac{a^m}{m^m}\right]}}. \quad (M)$$

Mutatio haec ad summam rei nihil confert. Jam ergo si $x^m = ax + y$ resolventem habeat $z^{m-1} = az^{m-2} - \ldots$; et haec porro et porro deprimatur ad quadraticam finalem $u^2 = \lambda u - \pi$ usque, tum haec, si resolvatur, praebebit (ut vidimus) irrationalem terminum $\surd Y$, nempe denominatorem formulae (M). Est autem terminus irrationalis in quadratica hac latens $= \surd\left[\frac{\lambda\lambda}{4} - \pi\right]$, ergo est:

$$1) \qquad \surd\left[\frac{y^{m-1}}{(m-1)^{m-1}} \pm \frac{a^m}{m^m}\right] = \surd\left[\frac{\lambda\lambda}{4} - \pi.\right]$$

Verbi causa pro $m = 2$ erit:

$$2) \qquad \surd\left(y + \frac{aa}{4}\right) = \surd\left(\frac{\lambda\lambda}{4} - \pi\right).$$

Et pro $m = 3$ erit:

$$3) \qquad \surd\left(\frac{yy}{4} - \frac{a^3}{27}\right) = \surd\left(\frac{\lambda\lambda}{4} - \pi\right).$$

(Nam in ista (1) valet + pro m *pari*, et — pro m *impari*; ut supra dictum.) — Intuere nunc istam (1). Vides utrinque functiones esse *bimembres* tantum. Terminorum ad *dextram*, alter $\lambda\lambda$ est *quadraticus*; alter *non* quadraticus. Similiter ad *sinistram* quoque, terminorum alter semper est quadraticus, alter non quadraticus. (Nimirum pro $m =$ numero *pari* fit a^m quadraticus et y^{m-1} fit *non* quadraticus. At pro $m =$ *impari* numero praecise fit vice *versa*. Ita ut hic ultro casus *duo* prodeant.) Ergo in ista (1) sponte judicabis, ad dextram et sinistram aequari debere quadratum *quadrato*, non quadratum *non* quadrato. Sic ergo in (2) fit $\lambda = a$, et $\pi = -y$. Ergo $u^2 = au + y$. Redit nempe resolvenda *ipsa* $x^2 = ax + y$; quippe quae resolventem quadraticam $u^2 = \lambda u - \pi$ *non* habet. — At vero casu (3) seu *cubico*, comparatio offert $\lambda = y$, $\pi = \frac{a^3}{27}$, ergo $u^2 = yu - \frac{a^3}{27}$; nempe legitima cubicae *resolvens*. Porro pro $m = 4$ seu pro $x^4 = ax + y$, ista (1) praebet:

$$4) \qquad \surd\left(\frac{y^3}{27} + \frac{a^4}{4^4}\right) = \surd\left(\frac{\lambda\lambda}{4} - \pi\right).$$

Fit ergo hic $\lambda = \frac{aa}{8}$ $\pi = -\frac{y^3}{27}$, ergo $u^2 = \frac{aa}{8} u + \frac{y^3}{27}$. A.) Quae est ultima resolvens *biquadraticae*. Posito enim $u = 8w$, fit $w^2 = \frac{aa}{64} w + \frac{y^3}{27 \cdot 64}$. Prorsus ut (§. 9. K). Nisi quod ibi b loco a scribitur, quia ibi $x^4 = bx + y$, hic autem $x^4 = ax + y$. — Denique sit $m = 5$, vel $x^5 = ax + y$; tum pro (1) habetur:

$$5) \qquad \surd\left(\frac{y^4}{4^4} - \frac{a^5}{5^5}\right) = \surd\left(\frac{\lambda\lambda}{4} - \pi\right).$$

Fit ergo hic $\lambda = \frac{yy}{8}$, et $\pi = \frac{a^5}{5^5}$. Ergo $u^2 = \frac{yy}{8} u - \frac{a^5}{5^5}$. (T) — Ergo si $x^5 = ax + y$ habeat resolventem $z^4 =$ etc., et haec *porro* resolventem $t^3 =$ etc., et haec tandem *porro* resolventem $u^2 = \lambda u - \pi$, haec ultima jam ante oculos (T) et in *potestate* est! Idque per commoditatem *Binomii* in ista (1) *utrinque* existentis. — Et jam autem pro *generali* etiam $x^m = ax + y$, resolventem quadraticam seu ultimam exhibebimus. Nam in ista (1) ad sinistram unice attendendum est, utra pars quadrato $\lambda\lambda$

respondeat. Nempe pro m *pari* aequabitur:

6) $$\frac{\lambda\lambda}{4} = +\frac{a^m}{m^m} \text{ (et residuum residuo.)}$$

Pro m *impari* autem aequabitur:

7) $$\frac{\lambda\lambda}{4} = \frac{y^{m-1}}{(m-1)^{m-1}} \text{ (et residuum residuo.)}$$

Atque sic ergo pro $x^m = ax + y$ ante oculos et praesto est ultima quadratica resolvens, et quidem pro m *pari* erit:

8) $$u^2 = \frac{2a^{\frac{m}{2}}}{m^{\frac{m}{2}}} u + \frac{y^{m-1}}{(m-1)^{m-1}}$$

et pro m *impari* erit:

9) $$u^2 = -\frac{2y^{\frac{m-1}{2}}}{(m-1)^{\frac{m-1}{2}}} u - \frac{a^m}{m^m}$$

Jucunde rem ad $m = 2$, $m = 3$, $m = 4$ eventu comprobabis. Deinde pro $m = 5$ seu $x^5 = ax + y$ habetur (9) haec ultima resolvens:

10) $$u^2 = \frac{yy}{8} u - \frac{a^5}{5^5}.$$

§. 12.

At vero in Cardano meo (§. 24—32) *altius* etiam progressus fui, et nempe pro $x^m = ax + y$ resolventem etiam *primam* $z^{m-1} = \alpha z^{m-2} - \ldots \mp \pi$ ex principio delicato et prorsus extraordinario *deduxi.* — Nimirum reperi, hanc $x^m = ax + y$ habere resolventem immediatam simplicis hujus formae:

1) $$z^{m-1} \mp \vartheta z \pm \pi = 0. \text{ Et esse nempe:}$$

2) $$z^{m-1} \mp m m y z \pm m(m-2) a^{\frac{m}{m-2}} = 0$$

ubi signum *Superius* valet pro m *impari*, inferius pro m *pari*. —

Nota. Natura aequationis alicujus non mutatur, si radix z per numerum aliquem arbitrarium multiplicetur, et nempe nz pro z in aequationem introducatur. Talis arbitrarius numerus indesinenter in *omni* cossa occurrit et imo in *Cabbala* cossica indispensabiliter praesto est. Talem arbitrarium numerum n etiam *supra* jam occurrentem vidimus, cum criteria $n\sqrt{Y}$ et $n\sqrt{X}$ tractaremus (§ 8); et id indicio fuit, radicem u induere nunc formam nu. Ejusmodi arbitrarius numerus $n = 8$ etiam *nuper* in praecedentibus coram fuit; intelligo (§. 11) substitutionem $u = 8w$, in resolvente ibi tractata. — Egi ergo de hoc arbitrario solide et eleganter in *Cardano* meo (§. 18 et §. 24—25). — Verbi causa pro $x^3 = ax + y$ est $u^2 = yu - \frac{a^3}{27}$ radicum A, B, eritque $x = \sqrt[3]{A} + \sqrt[3]{B}$. Fiat jam $u = nw$, ergo $w^2 = \frac{y}{n} w - \frac{a^3}{27nn}$, radicum M, N. Cum sit ergo $M + N = \frac{y}{n}$ et $MN = \frac{a^3}{27nn}$, vel $a = 3\sqrt[3]{n^2 MN}$, ergo habemus:

$$x^3 = 3x\sqrt[3]{nnMN} + n(M+N).$$

In hac jam simplicitas major obtineri determinatione nulla potest nisi per $n = 1$. Ergo Cubicae resolutio simpliciori forma exhiberi *non* potest. Simplicissimus enim numerus rationalis et integer $\sqrt[3]{nn}$ habetur ponendo $n = 1$. — Sit porro $m = 4$, id est $x^4 = ax + y$. Pro hac obtinuimus (§. 11. A) resolventem finalem seu quadraticam $u^2 = \frac{aa}{8} u + \frac{y^3}{27}$. Ut jam pateat, hanc simplicitatem esse *apparen-*

tem tantum, ponatur $u = nw$, ergo $w^2 = \frac{aa}{8n} w + \frac{y^3}{27nn}$, radicum M, N. Ergo $M + N = \frac{aa}{8n}$, et $MN = -\frac{y^3}{27nn}$. Ergo $a = 2\sqrt{2n[M+N]}$, et $y = -3\sqrt[3]{nnMN}$, ergo pro $x^4 = ax + y$ habetur:

3) $$x^4 = 2x\sqrt{2n[M+N]} - 3\sqrt[3]{nnMN}.$$

Ad vitandam ergo superfluam irrationalitatem, debet esse 2n *quadratum*, et nn *cubus* perfectus. Percurrendo jam numeros aliquot naturales, patebit sufficere $n = 8$; nam est $2n = 4^2$ et $nn = 4^3$. Sic loco (3) fit:

4) $$x^4 = 8x\sqrt{[M+N]} - 12\sqrt[3]{MN}.$$

quae sub radicalibus *nullo* jam amplius numerico factore inquinata est. At si formam *priorem* (3) retinuisses, vel (quod idem est,) ibi posuisses $n = 1$, tum ibi numerus vel factor $= 2$ sub radicali remansisset. Ergo forma (4) *perfectior* quam ista (3) censenda est. Unde cum fuerit $u = nw$, inventus nunc est numerus $n = 8$, ergo $u = 8w$. Et sic jam clare introspicis (§. 11, A) causam et indolem substitutionis ibi seu transformationis adhibitae $u = 8w$. — Casum porro $m = 5$, seu $x^5 = ax + y$ relege in *Cardano* (§. 25.) — Et sic jam, expositâ hâc numeri arbitrarii indole, quam clarissime ea, quae nunc sequuntur, intelliges.) —

Nimirum supra (Nro. 2), aequationis $x^m = ax + y$ *resolvens* ante oculos est. Quae ergo uno eodemque actu *omnium* talium $x^m = ax + y$ pro $m = 2$, $m = 3$ ... in se complecti debet resolventem. Jam vero casus $m = 2$ seu $x^2 = ax + y$ hic *excluditur*, quippe quae resolventem quadraticam *non* habet; unde factum est, ut supra (§. 11) quum aequationis $x^m = ax + y$ resolventem finalem quadraticam $\mu^2 = \lambda u - \pi$ quaererem, pro $m = 2$ resolvenda *ipsa* $x^2 = ax + y$ redierit. Ergo multo minus de *altiori* illius resolvente sermo esse potest. Nam (1) in forma $z^{m-1} - \vartheta z + \pi = 0$, praesentia secundi membri ϑz indicat, quod membrum primum z^{m-1} ad minimum debeat esse $= z^2$, id est ad minimum $m - 1 = 2$ vel $m = 3$. Ergo in resolvente (2) experimenta sumenda inchoant ab $m = 3$ seu $x^3 = ax + y$. Sic ergo ibi (2) fit $z^2 = 9yz - 3a^3$; vel adhibita arbitrarii numeri substitutione $z = 9u$, fit $u^2 = yu - \frac{a^3}{27}$. Quae est vulgata forma. — Sit jam $m = 4$, seu $x^4 = ax + y$. Erit (2):

$$z^3 = -16yz + 8aa.$$

Ut jam pateat, hanc esse non diversam a vulgari et supra tractata resolvente, subrogemus numerum arbitrarium ponendo $z = 8u$, eritque:

5) $$u^3 = -\frac{y}{4} u + \frac{aa}{64}.$$

Quae est jam vera *resolvens*; ut saepe vidimus. Et sane praeclarum est (saltim aequationis $x^m = ax + y$) resolventem uno actu eademque formula (2) complecti! — Pro $m = 5$ seu $x^5 = ax + y$ jam (2) fit:

6) $$z^4 = 25yz - 15\sqrt[3]{a^5}.$$

Quoniam ista (2) et ista (§. 11, Nro. 10.) per principia inter se toto coelo *diversissima* et nihil penitus commune habentia investigaverim, (ut ex Cardano meo patet,) ideo cogita quaeso, quanto impetu et furore cossico ad *confrontationem* utriusque festinarim. Nempe si resolvens (6) ad *cubicam* deprimatur, id est, ejus (6) *denuo* resolvens scribatur, et hujus denuo resolventis ultima jam porro seu *quadratica* resolvens scribatur $w^2 = \delta w - \varepsilon$, tum haec ultima vel *sponte* cum ista (§. 11, Nro. 10) consentire debet, vel saltim numeri arbitrarii n ope, ponendo nempe $w = nu$, ad consensum reduci debet. Positio nempe $w = nu$ praecedenti hanc formam tribuit:

$$u^2 = \frac{\delta}{n} u - \frac{\varepsilon}{nn}.$$

Quae comparationem jam cum *priori* (§. 11, Nro. 10) sustinere debet. Idque praecise ita *fieri*, vel

Cardanus (§. 31.) vel aeque facile proprium *Lectoris* experimentum docet. Ex aequatione nempe $\frac{\delta}{n} = \frac{yy}{8}$ habebitur numeri *arbitrarii* n determinatio huc spectans, quo facto et *secunda* aequatio $\frac{\varepsilon}{nn} = \frac{a^3}{6^3}$ sponte *consentiet!* — Et sic ergo utraque methodus praeclarum sibi invicem Testimonium dat; nec mirum est, me animadverso consensu utriusque methodi formulaeque, prae innocenti gaudio mire exultasse.

§. 13.

Jam vero ad methodos *differentiales* cossicas tandem transimus; de quibus monemus, eas omnes et singulas tum *Cabbalam* cossicam tum, quod idem est, *resolutionem* aequationum involvere, si rite tractentur. — Sit $y = X$, nempe functio ipsius x. Ergo pro incrementis $y + \varDelta$ et $x + \omega$ fit:

1) $$\varDelta = \frac{\omega dX}{dx} + \frac{\omega^2 d^2X}{2dx^2} + \frac{\omega^3 d^3X}{6dx^3} + \ldots$$

Et ipso $\varDelta$ iterum evanescente:

2) $$o = \frac{dX}{dx} + \frac{\omega d^2X}{2dx^2} + \frac{\omega^2 d^3X}{6dx^3} + \ldots$$

Sit $x^2 - ax = y$, ergo $X = x^2 - ax$, sic (2) fiet:

3) $$\omega + 2x - a = o.$$

Ex hac pone x in resolvendam, erit $\omega = \sqrt{[aa + 4y]}$; ergo in (3) habetur x. — Sequitur $x^3 - ax = y$, id est $X = x^3 - ax$, ex (2) nunc habebitur:

4) $$\omega^2 + 3x\omega + 3x^2 = a. \quad H.)$$

Talis H) jam ergo pro omni altiori gradu facile in promtu est; sed res dirigenda nunc est ad *resolutionem* cubicae. Huic scopo exstinguenda est, (ut eventus docebit,) altissima dignitas $3x^2$. (Et id ita requiritur pro *omni* altiori gradu.) — Fiat ergo $\omega = t + nx$, eritque:

5) $$[n^2 + 3n + 3]x^2 + [2n + 3]tx + t^2 = a.$$

Fiat ergo $n^2 + 3n + 3 = o$. Quam cum omnibus sui generis scribam $N = o$. Sic loco istius (5) restabit $t^2 + [2n + 3]xt = a$. Vel pro n verum suum ex $N = o$ valorem adhibendo, fiet:

$$t^2 + xt\sqrt{-3} = a. \text{ Vel pro } t = -u\sqrt{-3} \text{ fit:}$$

$$u^2 = xu - \frac{a}{3}. \text{ *Relationalis* cubicae! (§. 4, Nro. 6.)}$$

Sequitur $x^4 - ax = y$, id est $X = x^4 - ax$; (qui casus hic sufficit.) Ex (2) habebitur:

6) $$\omega^3 + 4\omega^2 x + 6\omega x^2 + 4x^3 = a. \quad H.)$$

Positoque hic quoque $\omega = t + nx$, fiet:

$$[n^3 + 4n^2 + 6n + 4]x^3 + [3n^2 + 8n + 6]x^2 t + [3n + 4]xt^2 + t^3 = a.$$

Ergo fiat $n^3 + 4n^2 + 6n + 4 = o$, seu $N = o$. Quae habet radicem $n = -2$. Sic praecedens induit formam:

$$t^3 = 2xt^2 - 2x^2 t + a, \text{ vel pro } t = 2u \text{ fit:}$$

$$u^3 = xu^2 - \frac{xx}{2}u + \frac{a}{8}. \text{ *Relationalis* biquadraticae!}$$

Qua datâ datur *Resolutio*; ut saepe dixi. Nempe x ex relationali in resolvendam introducendo; quo facto *resolvens* gignitur. At non vice *versa* sic fit; nempe data resolvente *relationalis* non datur.

Sequitur $x^5 - ax = y$, unde (2) habetur:

7) $$\omega^4 + 5\omega^3 x + 10\omega^2 x^2 + 10\omega x^3 + 5x^4 = a. \quad H.)$$

Ad exstinguendam x^4 fiat $\omega = t + nx$, fiet:

8) $$n^4 + 5n^3 + 10n^2 + 10n + 5 = o, \text{ vel } N = o.$$

Disce nunc *indolem* omnium nostrarum $N = o$. Posito nempe $n = m - 1$, induunt formam respective hanc:

$$m^2 + m + 1 = 0$$

$$m^3 + m^2 + m + 1 = 0$$

9) $$m^4 + m^3 + m^2 + m + 1 = 0.$$

Nimirum verbi causa ista (8) in hanc (9) abit. Et oriuntur hae (9), si $m - 1 = 0$ per $m - 1$ dividitur. Praesenti casu est $m^5 - 1 = 0$; quae sit radicum $1, \alpha, \beta, \gamma, \delta$. Ergo ista (9) continet radices $\alpha, \beta, \gamma, \delta$. — Quodsi ergo istam (7) ut dixi, ope $\omega = t + nx$ transformaveris, deinde ope hujus $N = 0$, dignitatem x^4 exstinxeris, et in residua aequatione posueris $n = m - 1$, tum ante oculos habebis hanc:

10) $$t^4 + [1 + 4\alpha] x t^3 + [1 + 3\alpha + 6\beta] x^2 t^2 + [1 + 2\alpha + 3\beta + 4\gamma] x^3 t = a.$$

Quam (Philos. Coss. §. 12) quasi divinando Margaritam dixeram. Nam hanc ipsam (10) ex medio sinu *Cabbalae* prodeuntem videbimus. Nunc monuisse satis est. —

Unum adhuc subjungo priusquam ab hac tota theoria discedo. Quum hic non *hypothesis* locum habuerit, sed per absolutam operationem, ipsissima *Taylori* formula fuerit adhibita, ideo fit, ut formulae productae ad unam omnes verum quod supra dixi, *Criterium* exhibeant. Si verbi causa istam (4) differentiabis pro $dx = 0$, deinde ω elimines, prodibit $3x^2 - 4a = 0$ nempe verum Criterium $X = 0$, quale in charactere $\frac{dy}{\sqrt{Y}} = \frac{dx}{\sqrt{X}}$ exhibetur. Idem sic fit in omnibus H) aequationibus, nec minus reductis beneficio $\omega = t + nx$ aequationibus inhaeret. Sic si (10) differentietur pro $dx = 0$, et jam t eliminetur, omnes $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ sponte evanescunt, et obtinetur $X = 0$, nempe praecise valor supra (§. 9, Nro. 4) exhibitus. Idem intellige de (6) vel (7) praesentis paragraphi, quas formas designavi per H. Et scribam eas imo breviter $H = 0$. Pone nunc has adornatas esse non pro *speciali* tantum $x^m = ax + y$, sed pro *generali* data $x^m = ax^{m-2} + \ldots$, verbi causa pro $x^5 = ax^3 + bx^2 + cx + y$, tum (ut dixi) ex $H = 0$ et $dH = 0$ ejecto ω prodit $X = 0$ seu criterium *primum*. Dein ex $dH = 0$ et $d^2H = 0$, ejecto ω habetur criterium *secundum* $X' = 0$, et sic deinceps.

§. 14.

Sed jam ad aliam theoriam progredimur. — Immortalis Lagrangius generale principium cossae resolutorium posuit:

1) $$u = x' + \alpha x'' + \beta x''' + \gamma x^{IV} + \ldots$$

ubi $x' \ldots$ sunt radices ex $x^m =$ et cetera, et $\alpha, \ldots$ radices ex $t^m - 1 = 0$ excepta unitate. Num autem functio (1) aequationibus qua *talibus* absolute inhaereat, id in *suspenso* reliquit, funesto *sursolidae* eventu edoctus (Nov. Memor. Berol. T. III, §. 86). — Eam rem nunc a priori decidam. Sit $x^2 = ax + y$, ergo $x' + x'' = a$, $x'x'' = -y$, ergo:

2) $dx' + dx'' = 0$. 3) $x'dx'' + x''dx' = -dy$.

Ejectoque dx'' fit: 4) $\frac{dy}{dx} = x' - x''$. Quae est praecise forma (1). Casu hoc enim (1) ita sonat $u = x' + \alpha x''$, et α erit radix negativa ex $t^2 - 1 = 0$. Ex his $u = x' - x''$ et $a = x' + x''$ habetur $2x' = a + u$, inde x in datam imposito fit resolutio. —

Sequitur $x^3 = ax + y$, ergo:

5) $$x' + x'' + x''' = 0,\quad x'x'' + x'x''' + x''x''' = -a,\quad x'x''x''' = y.$$

Sumto generaliter $dx = \text{Const.}$, speciatim erit:

$$dx' = \text{Const. et } dx'' = \text{Const. et } dx''' = \text{Const.}$$

Regula pro hoc et quovis altiori casu. — „Istarum (5) omnium (exceptâ ultimâ, quae y continet,) sume differentialia continuata, donec nullum x sed mera differentialia adsunt. In quo negotio disces brevi experimento, non alia re opus esse, nisi ut pro $x' \ldots$ ponas $dx' \ldots$, et erit nempe:

6) $$dx' + dx'' + dx''' = 0$$

7) $$dx'dx'' + dx'dx''' + dx''dx''' = 0.$$

Aequationem *ultimam* $x'x''x''' = y$ autem differentiabis toties, quoties proxima antecedens (7) differentiata fuit. Sic in hac ultima radices $x' \ldots$ *unica* dimensione restabunt, fietque:

8) $$d^2y = 2\,[x'dx''dx''' + x''dx'dx''' + x'''dx'dx''].$$

Atque *hic* quoque labori tuo penitus parco. Nam lex item in *oculos* cadit. Singula *radix* x' multiplicatur per differentialia omnium *reliquarum* radicum. Et *numericus* etiam factor, (qui hic est $= 2$) nihil negotii facessit. Nam parva attentio docet, ad $d^n y$ pertinere factorem numericum $= 1.2.3 \ldots n$. — Jam regulam totam habes." — Quia vero (6) et (7) sunt *homogenei*, ideo poni potest verbi causa $dx''' = \alpha dx'$; $dx'' = \beta dx'$. Sic induunt formam:

9) $\alpha + \beta = -1$ 10) $\alpha\beta = 1$.

Sunt ergo α, β radices *hujus:*

11) $t^2 + t + 1 = 0$. Quae est $t^3 - 1 = 0$, per $t - 1 = 0$ divisa.

Ergo α, β sunt radices ex unitate *cubicae*. Inventis ergo jam α, β, imponantur nunc isti $dx''' = \alpha dx'$ et $dx'' = \beta dx'$ etiam in *istam* (8), unde ob $\alpha\beta = 1$ habebitur:

12) $$\frac{d^2y}{2dx^2} = x' + \alpha x'' + \beta x'''.$$

Quae est jam praecise functio *Lagrangiana* (1), pro casu nempe cubico; et quidem per differentiale *secundum* expressa!

§. 15.

Sit $x^4 = ax^2 + bx + y$, ergo 1) $dx' + \ldots = 0$, $dx'dx'' + \ldots = 0$, $dx'dx''dx''' + \ldots = 0$. item:

2) $$-d^3y = 6\,[x'dx''dx'''dx^{IV} + \ldots].$$

Nunc pro lubitu v. c. ponatur:

3) $dx'' = \alpha dx'''$, $dx' = \beta dx'''$, $dx^{IV} = \gamma dx'''$. Ergo (1):

4) $\alpha + \beta + \gamma = -1$; $\alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma = 1$; $\alpha\beta\gamma = -1$.

Ergo α, β, γ sunt radices ex $t^3 + t^2 + t + 1 = 0$, quae oritur si $t^4 - 1 = 0$ per $t - 1 = 0$ dividatur. Ergo α, β, γ praecise sunt radices ex unitate *biquadraticae*. Ut rem brevi expediamus, fiat $\beta = \alpha^2$, $\gamma = \alpha^3$, (id est eligatur radix $\alpha = \sqrt{-1}$ pro primâ,) ergo pro istis (3) scribetur:

5) $dx'' = \alpha dx'''$, $dx' = \alpha^2 dx'''$, $dx^{IV} = \alpha^3 dx'''$.

Quibus in istam (2) subrogatis habetur:

6) $$-\frac{d^3y}{6dx^3} = x' + \alpha x'' + \alpha^2 x''' + \alpha^3 x^{IV}.$$

Ecce denuo functionem (1) Lagrangianam, ad hunc casum; et quidem per differentiale *tertium* expressam.

Similiter jam pro $x^5 = ax^3 + bx^2 + cx + y$ erit $dx' + \ldots = 0$, $dx'dx'' + \ldots = 0$, et cetera. At ex $y = x'x''x'''x^{IV}x^{V}$ habetur:

7) $$d^4y = 1.2.3.4\,[x'dx''dx'''dx^{IV}dx^{V} + \ldots]$$

Positis jam pro lubitu:

8) $dx^{V} = \alpha dx'$, $dx^{IV} = \beta dx'$, $dx''' = \gamma dx'$, $dx'' = \delta dx'$,

Sic pro istis $dx' + \ldots = 0$ et cet. fiet:

9) $\alpha + \beta + \gamma + \delta = -1$; $\alpha\beta + \ldots = 1$; $\alpha\beta\gamma + \ldots = -1$; $\alpha\beta\gamma\delta = 1$.

Ergo $\alpha \ldots \delta$ sunt radices hujus $t^4 + t^3 + t^2 + t + 1 = 0$, id est ex unitate sursolidae. Scribatur ergo $\beta = \alpha^2$, $\gamma = \alpha^3$, $\delta = \alpha^4$, tum loco (8) fiet:

10) $dx^{V} = \alpha dx'$, $dx^{IV} = \alpha^2 dx'$, $dx''' = \alpha^3 dx'$, $dx'' = \alpha^4 dx'$.

Quibus in istam (7) subrogatis fit:

11) $$\frac{d^4y}{24dx^4} = x' + \alpha x'' + \alpha^2 x''' + \alpha^3 x^{IV} + \alpha^4 x^{V};$$

Atque sic ex ipso operationis processu sequitur, pro:

$$x^m = ax^{m-1} + bx^{m-2} + \ldots + y \text{ fore:}$$

12) $$\frac{\pm d^{m-1}y}{1.2.3\ldots(m-1)\,dx^{m-1}} = x' + \alpha x'' + \alpha^2 x''' + \ldots$$

ubi + valet pro m impari, et — pro m pari. — Et sic ergo functio (1) aequationibus *absolute* omnino inhaerere demonstrata est. Sed utrum ad *resolutionem* etiam aequationum naturaliter destinata vel apta sit, ea toto coelo *diversa* est quaestio, quae demum per *Cabbalam* deciditur.

Redeo ad cubicam (§. 14), et scribo breviter $\frac{d^2y}{2dx^2} = u$. Quia jam positio $dx''' = \alpha dx'$, et $dx'' = \beta dx'$ pro *lubitu* prorsus quoad electionem radicum fuit, ideo permutetur α et β, sic *secunda* forma seu conjugata sequitur:

$u = x' + \alpha x''' + \beta x''$. Quae cum priori: (§. 14, Nro. 12)

$u = x' + \alpha x'' + \beta x'''$ formabit quadraticam:

$u^2 = 3x'u - 3a$, vel (arbitrario numero 3 adhibito) si 3u pro u scribatur, fit $u^2 = x'u - \frac{a}{3}$. *Relationalis* cubicae. Jam radices x', x'', x''' *ipsas* quoque permutando, oriuntur ergo relationales *tres:*

13) $$u^2 = x'u - \frac{a}{3}$$

$$u^2 = x''u - \frac{a}{3}$$

$$u^2 = x'''u - \frac{a}{3}$$

quorum productum jucundo calculo $u^6 = yu^3 - \frac{a^3}{27}$ seu *resolventem* sistit. Et sic ergo (pro omni gradu) radices u, (ex quibus tum *relationales* tum et resolventes ipsae formantur) nil sunt aliud nisi differentialia $= \frac{d^ny}{dx^n}$, et per ea utique Exhibentur. Quae res immortali Lagrangio omnino placitura fuisset. — Jam de functione $u = x' + \alpha x'' + \alpha^2 x''' \ldots$ satis dictum.

§. 16.

Sunt et *alia* principia cossam tractandi. Si $x^3 = ax + y$, erit aperte *a duarum* et *y trium* dimensionum. Scribe ergo homogeneo modo $x^3 = u^2x + y^3$. Agitur ergo de arte *homogeneas* aequationes in *factores* discerpendi. Erit enim nempe $x = F(u,y)$, ergo $dx = Mdu + Ndy$, unde per theorema homogeneorum fit $x = Mu + Ny$. Ubi ergo quaeruntur M et N. Similiter pro altiori gradu. — Ego rem non persequar. Sed hac occasione (Aetas Coss. §. 18) dedi pulchrum augmentum rei *integralis*. Nempe si V sit homogenea functio n dimensionum, tum pro $dV = Pdx + Qdy$ adhibent regulam:

1) $$nV = Px + Qy.$$

Et hunc solum casum, quantum scio, proponunt. At ego docui rem pro omnibus *altioribus* homogeneis d^nV valere. Detexi nempe, a terminis ut Md^2y, seu altioribus (si forte occurrant,) *nihil* pendere, et salvâ integratione poni $M = 0$. Hoc praemisso jam docui, formulae:

$d^2V = Pdx^2 + Qdxdy + Rdy^2$ integrale esse:

$n[n-1]V = Px^2 + Qxy + Ry^2$. Porro *hujus:*

$d^3V = Pdx^3 + Qdx^2dy + Rdxdy^2 + Sdy^3$ integrale esse:

$n(n-1)(n-2)\,V = Px^3 + Qx^2y + Rxy^2 + Sy^3$.

unde lex patet pro altioribus. Idem intellige de pluribus variabilibus x,y,z... (Exempla vid. loco cit. vel ipse concinnabis.) Ceterum si inter factores praecedentes $n(n-1)(n-2)\ldots$ occurrat unus $= 0$, tum integrale non habetur. Sic si $n = 0$, tum ne *prima* quidem $nV = Px + Qy$ aliquid efficit.

§. 17.

Jam sensim ad rem propius accedo. Ex cossa nempe omnes hypotheses *expellendae*, et Natura *ipsa*, quid efficere possit, ad respondendum theoretico modo cogenda est. — Si $x^2 = ax + b$ (radicum p, q) resolvi debet, habebit divisorem $x - p = o$; ergo fit:

$$\frac{x^2 - ax - b}{x - p} = \frac{o}{o}.$$

Ergo hoc valore indeterminato $= P$ posito, per vulgarem regulam, differentiando nempe numeratorem et denominatorem, fit $2x - a = P$, ex qua et datâ ejecto x, fit *Resolutio*. —

Porro sit $x^3 = ax + b$; haec si resolvi potest, habebit divisorem quadraticum $x^2 - mx + p = o$, (nam simplex divisor $x - p = o$ hic non amplius sufficit, ut actu patebit.) Ergo est:

$$\frac{x^3 - ax - b}{x^2 - mx + p} = \frac{o}{o} \text{ unde: } \frac{3x^2 - a}{2x - m} = P. \quad (1).$$

In hac (1) commodius pone $m = 2n$, $P = \frac{Q}{2}$. Dein ex ea et ex data ejecto x fiet:

2) $[n^3 - an - b]\,Q^3 + [3an^2 + 9bn + aa]\,Q^2 + 27bb - 4a^3 = o.$

Breviter $\mathfrak{A}Q^3 + \mathfrak{B}Q^2 + \mathfrak{C} = o$. — In hac, $\mathfrak{A}$ exstingui non potest, quia $\mathfrak{A} = o$ foret *ipsa* gradus cubici, ergo *secundus* $\mathfrak{B}$, ad evanescendum destinatur. Ergo fac $\mathfrak{B} = o$, vel:

3) $3an^2 + 9bn + aa = o.$

Sic loco (2) restat:

4) $[n^3 - an - b]\,Q^3 + 27bb - 4a^3 = o.$

Nunc ergo ex (3) habetur n, ergo ex (4) habetur Q, ergo in (1) vel $3x^2 - Qx = a - nQ$ habetur x. Ista (3) jam praecise est *Resolvens* cubicae. Ponendo enim $n = -\frac{3z}{a}$, seu etiam (quod ob sequentes casus praeferendum est) ponendo $n = -\frac{aa}{9z}$, utroque casu prodit vulgaris resolvens $zz = yz - \frac{a^3}{27}$. — Ceterum resolvens (3) *introduci* nunc potest in residuam (4), verbi causa literam b ex (3) in (4) subrogando. Quo facto jucundam *Divisibilitatem* offendes, nempe per $(3n^2 - a)^2$, et restabit $Q^3 + \frac{3aa}{n} = o$. Quae isti (4) aequivalet.

§. 18.

Sit $x^4 = ax + b$, (nam casus hic sufficit.) Fiet:

$$\frac{x^4 - ax - b}{x^2 - mx + p} = \frac{o}{o} \text{ Ergo } \frac{4x^3 - a}{2x - m} = P.$$

Vel (posito $a = 4c$, $m = 2n$, $P = 2Q$) fit: 1) $\frac{x^3 - c}{x - n} = Q.$

Ex hac et datâ ejecto x oritur:

2) $[n^4 - 4cn - b]\,Q^4 + 4\,[2cn^3 + bn^2 + c^2]\,Q^3$
$+ 2\,[9c^2n^2 + 6bcn + bb]\,Q^2 = b^3 + 27c^4.$

Vel $\mathfrak{A}Q^4 + \mathfrak{B}Q^3 + \mathfrak{C}Q^2 = \mathfrak{D}$. Heic $\mathfrak{A} = o$ foret casus *ipse* biquadraticus; ergo ponendum $\mathfrak{B} = o$ vel: $2cn^3 + bn^2 + c^2 = o$. repositoque $a = 4c$):

3) $8an^3 + 16bn^2 + aa = o$, vel $\left[\text{si } n = -\frac{a}{8z}\right]$:

$z^3 = -\frac{b}{4}z + \frac{aa}{64}$; *Resolvens* nempe.

Ob $\mathfrak{B} = o$, residua (2) est:

4) $[n^4 - 4cn - b]\,Q^4 + 2\,[3cn + b]^2\,Q^2 = b^3 + 27c^4.$

In hanc, si lubet, ex (3) introduc literam b, tum cernes jucundam illam Divisibilitatem per factorem quadraticum (ut §. 17) et restabit:

5) $$n^4Q^4 + 2c^2n^2Q^2 + c^4 + 8c^3n^5 = 0.$$

Quodsi initio *cubicum* divisorem adhibuisses:

$$\frac{x^4 - ax - b}{x^3 - mx^2 + nx - p} = \frac{0}{0} \text{ ideoque } \frac{4x^3 - a}{3x^2 - 2mx + n} = P;$$

obtinuisses $\mathfrak{A}P^4 + \mathfrak{B}P^3 + \mathfrak{C}P^2 + \mathfrak{D} = 0$ *talem*, quae literas m,n in $\mathfrak{B}$ continet usque ad *tertiam* dimensionem, et in $\mathfrak{C}$ usque ad *secundam*. Sic ponendum fuisset $\mathfrak{B} = 0$ et $\mathfrak{C} = 0$, et ex his vel m vel n *eliminandum* fuisset. Ergo res longe *prolixior* fuisset; perduxisset autem ad residuam *Bimembrem* $\mathfrak{A}P^4 + \mathfrak{D} = 0$.

§. 19.

Jam pro $x^5 = ax + b$ (nam id sufficit,) habetur:

$$\frac{x^5 - ax - b}{x^2 - mx + p} = \frac{0}{0} \text{ unde } \frac{5x^4 - a}{2x - m} = P.$$

Vel (posito $a = 5c$, $m = 2n$, $P = \frac{5Q}{2}$) fiet:

1) $$\frac{x^4 - c}{x - n} = Q. \text{ Ex hac et datâ ejecto } x:$$

2) $$[n^5 - 5cn - b]Q^5 + 5[3cn^4 + bn^3 + c^2]Q^4 +$$
$$5[16c^2n^3 + 8bcn^2 + b^2n]Q^3 + 10[16c^3n^2 + 8bc^2n + b^2c]Q^2 + b^4 - 256c^5 = 0. \text{ Vel:}$$

3) $$\mathfrak{A}Q^5 + \mathfrak{B}Q^4 + \mathfrak{C}Q^3 + \mathfrak{D}Q^2 + \mathfrak{E} = 0.$$

Hajc $\mathfrak{A} = 0$ foret *ipse sursolidus* casus; ergo evanescat secundus $\mathfrak{B} = 0$, qui reddito $c = \frac{a}{5}$ evadit:

4) $$15an^4 + 25bn^3 + aa = 0.$$

Quae ergo est sursolidae nostrae resolvens. In hac pone y pro b, (ut nempe ad $x^5 = ax + y$ accommodetur,) ergo:

5) $$15an^4 + 25yn^3 + aa = 0.$$

Jam cogita quaeso, quanto furore cossico etiam *hic* rursus ad confrontationem cum *superioribus* methodis festinaverim! Nimirum ad explorandum, num ista (§. 12, Nro. 6) cum praecedente (5) *coincidat.* — At vero *coincidit* ubique, et nempe pro $n = -\frac{a^{\frac{2}{5}}}{a}$ nostra (5) praecise hanc

$$z^4 = 25yz - 15\sqrt[3]{a^5} \text{ } \textit{spectandam} \text{ sistit!}$$

Jam ergo in ista (2) vel (3) ponendo $\mathfrak{B} = 0$, residua erit:

6) $$[n^5 - 5cn - b]Q^5 + 5n[b + 4cn]^2Q^3 + 100[b + 4cn]^2Q^2 = 256c^5 - b^4.$$

In hanc ex $\mathfrak{B} = 0$ introduc literam b, (haec litera enim in resolventibus $\mathfrak{B} = 0$ semper *primae* dignitatis tantum est, ideoque facile introducitur;) orietur ista jucunda Divisibilitas, per factorem $(n^4 - c)^2$, et habebitur loco (6) forma haec compendiaria:

7) $$n^9Q^5 + 5c^2n^7Q^3 + 10c^3n^6Q^2 + c[81n^8 + 14cn^4 + c^2] = 0, \text{ positoque } Q = \frac{c}{n}u \text{ fiet:}$$

8) $$u^5 + 5u^3 + 10u^2 = y, \left[\text{ubi } y = -\frac{81n^8 + 14cn^4 + c^2}{cn^4}\right].$$

Jam vero sursolida radix obtutum nostrum elabi et inaccessas *latebras* repetere incipit. Nam ex resolvente (4) habetur quidem n, sed an ex (6) habetur Q quoque? Vel quod idem est, an ex (8) habetur u quoque? — Casu *biquadraticae* res bene successit; nam residua erat hujus formae resolubilis $\mathfrak{A}Q^4 + \mathfrak{C}Q^2 = \mathfrak{D}$. At nostrae *praesentes* (7, 8), (quae sunt identicae,) offerunt faciem *sursolidam*, de quâ nunc unice *laboratur.*

Nota. 1. In hac tota theoria dimensio prima vel simplex Q constanter et *ultro* ex calculo excidit. 2. In reductis nostris aequationibus [verbi causa in (2)] membrum ultimum $\mathfrak{E}$ repraesentat semper et praecise id, quod supra criterii nomine per Y designavimus. Repone enim *a loco c*, et libera

aequationem a fractionibus, tum constabit assertum. 3. Coefficiens *primus* $\mathfrak{A}$. autem, repraesentat expresse et semper propositam resolventem *ipsam*. Sic (§. 17—19) valores:

$\mathfrak{A} = n^3 - an - b$ et $\mathfrak{A} = n^4 - an - b$ et $\mathfrak{A} = n^5 - an - b$ respective ante oculos habes.

§. 20.

Pro sursolida (§. 19 initio), loco quadratici divisoris adhiberi potuisset *cubicus* etiam, vel imo *biquadraticus*. Atque de *hoc* nunc pauca. Data sit $x^5 = ax^3 + bx^2 + cx + d$, et divisor $x^4 - mx^3 + nx^2 - px + q = 0$. Erit:

$$\frac{5x^4 - 3ax^2 - 2bx - c}{4x^3 - 3mx^2 + 2nx - p} = P.$$

Ex qua et data eliminando x habebitur forma:

$$\mathfrak{A}P^5 + \mathfrak{B}P^4 + \mathfrak{C}P^3 + \mathfrak{D}P^2 + \mathfrak{E} = 0.$$

quae *tres* jam incognitas m, n, p continet. Ergo (cum casu paragraphi praecedentis *una* $\mathfrak{B} = 0$ sufficeret, et casu cubici divisoris *duae* $\mathfrak{B} = 0$, $\mathfrak{C} = 0$ opus forent,) sic praesenti casu *tres* $\mathfrak{B} = 0$, $\mathfrak{C} = 0$, $\mathfrak{D} = 0$ sunt opus; quae istas m, n, p nempe *promiscue* continent, et adscendent hi $\mathfrak{B}, \mathfrak{C}, \mathfrak{D}$ quoad dimensiones ad quartam, tertiam, secundam respective. Sic respectu eliminationum oritur lex illa $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$ dimensionum pro obtinendo veri causa m. Quae aequatio 24 *mi* gradus pro m si *resoluta* foret, habebitur casus vel reductio *bimembris* $\mathfrak{A}P^5 + \mathfrak{E} = 0$, mediante aequatione 24 *mi* gradus, ut modo dixi. Sic Lagrangiana reductio *Bimembris*, et Lagrangiana *eliminationum* lex $= 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4$ uno eodemque actu in conspectum prodeunt. — At si (ut §. 19 initio, vel quovis alio casu) in *quadratico* divisore subsistas, tum $\mathfrak{B} = 0$ solam et *unicam* incognitam n continet, ut vidimus, ideoque subinde resolvens immediata *simplicissima* reperta fuit, sed jam in resolutione *residuae* $\mathfrak{A}Q^5 + \mathfrak{C}Q^3 + \mathfrak{D}Q^2 + \mathfrak{E} = 0$ terminus haeret, ut vidimus. Ergo si adhibendâ solâ et unicâ resolvente $\mathfrak{B} = 0$ pro solâ n, legem istam eliminationum $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4$ tantisper et interim *praeternavigavimus*, difficultates hae procrastinatae necessario in *residuae* resolutione ingruent; ita ut labor quoad summam rei semper *idem* et *indispensabilis* maneat, sive is ab *initio* jam, seu demum postfestum incumbat. Interim valde beatum tamen est, *existere* tamen et exhiberi (beneficio quadratici divisoris) etiam solam $\mathfrak{B} = 0$, id est solam unice incognitam n continentem; quippe quae biquadratica pro n, immediate *simplicissimam*, quae existit, *Resolventem* exhibet, et sponte cum Criterio Y et fundamentalibus operationibus a me supra indigitatis *confrontari* sustinentem. — Has observationes utique essentiales et magni momenti puta. — Cum ergo *semel* necesse sit, omnes terrores eliminationis $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4$ *mi* gradus in se recipere, ideo cabbalam subinde in mediam difficultatum *omnium* arenam dirigam, sed suo tempore.

§. 21.

Mutandi discursus causa nunc *reliquas* methodos Differentiales enumerabo et imo exhauriam. — Methodus *prima*. Sicut hactenus posuimus $dx =$ Const., sic adornari etiam omnia possunt pro $dy =$ Const. — Sic pro $x^2 = ax + y$ fiet:

1) $2x\,dx = a\,dx + dy$

2) $2x\,d^2x + 2dx^2 = a\,d^2x$. Pone $\frac{dx^2}{d^2x} = u$.

Jam haec (2) per d^2x divisa induet formam $2x = a - 2u$, ex qua, impone x in datam, fit $4u^2 = aa + 4y$. Ex hac habetur u, ergo ex praecedenti habetur x. — Porro jam *Cubica* $x^3 = ax + y$ differentietur, et fiet:

3) $3x^2d^3x + 18x\,dx\,d^2x + 6dx^3 = a\,d^3x$. Divide per dx^3:

4) $\frac{3x^2d^3x}{dx^3} + \frac{18x\,d^2x}{dx^2} + 6 - \frac{ad^3x}{dx^3} = 0$. Breviter:

5) $3x^2P + 18xQ + 6 - aP = 0$.

Ex hac et ex datâ cubica ejecto x fit:

$$6)\qquad YP^3 + 108[3a^2Q^2 - 9yQ + a]P + 8.27[27yQ^3 - 9aQ^2 + 1] = 0. \quad [\text{Ubi } Y = 27y^2 - 4a^3].$$

In hac methodo semper *secundus* terminus deest, ut supra *penultimus* semper excidit (§. 17—19). Fiat ergo:

$$7)\qquad 3a^2Q^2 - 9yQ + a = 0. \quad \text{Unde } Q \text{ constat.}$$

Et residua $YP^3 + 8.27(27yQ^3 - 9aQ^2 + 1) = 0$ praebet jam valorem P; ergo in (5) habetur x. Patet consensus methodi hujus cum ista (§. 17. Seqq.) — In ista (7) ponendo $Q = \frac{3z}{aa}$ oritur vulgaris resolvens $z^2 = yz - \frac{a^3}{27}$. Et pendet ergo resolutio ab inveniendis:

$$Q = \frac{d^2x}{dx^2} \qquad P = \frac{d^3x}{dx^3}.$$

Nunc ad *biquadraticam* transibis. Dicto modo prodibit forma:

$$\mathfrak{A}P^4 + \mathfrak{B}P^2 + \mathfrak{C}P + \mathfrak{D} = 0,$$

ubi positis $\mathfrak{B} = 0$, $\mathfrak{C} = 0$ patebit rem pendere ab:

$$P = \frac{d^4x}{dx^4} \quad Q = \frac{d^3x}{dx^3} \quad R = \frac{d^2x}{dx^2}.$$

Similiter pro altioribus; nec pluribus opus est.

Methodus altera. — Potest nempe calculus etiam pro *nullo* constanti differentiali adornari. Sic pro cubica $x^3 = ax + y$ fiet:

$$8)\qquad [3x^2 - a]\,d^2x + 6xdx^2 = d^2y.$$

Hanc divide per d^2x, deinde sit:

$$M = \frac{d^2y}{d^2x} \qquad N = \frac{6dx^2}{d^2x}. \quad \text{Sic (8) fiet:}$$

$$9)\qquad 3x^2 - a + Nx - M = 0. \quad \text{Ex qua et data ejecto x habetur:}$$

$$10)\qquad M^3 - 3aM^2 + [27yN - 9aN^2]M = Y + 9a^2N^2 - 27yN^3, \quad (\text{ubi } Y = 27y^2 - 4a^3).$$

Ad cubum complendum, utrinque — a^3 addendum est:

$$11)\qquad M^3 - 3aM^2 + [27yN - 9aN^2]\,M - a^3 = Y - a^3 + 9a^2N^2 - 27yN^3.$$

Comparando jam superiorem partem cum cubo:

$$M^3 - 3aM^2 + 3a^2M - a^3 \text{ fiet:}$$

$27yN - 9aN^2 = 3a^2$ vel $3aN^2 - 9yN + aa = 0$. Quae resolventis forma coincidit cum ista (§.17, Nro.3) si fiat $N = -n$. Jam ergo N habetur. At ista (11) jam induit formam:

$$(M - a)^3 = Y + 9a^2N^2 - 27yN^3 - a^3 \text{ vel:}$$

$$M = a + \sqrt[3]{[Y - a^3 + 9a^2N^2 - 27yN^3]}.$$

ex qua jam M habetur. Methodus haec ergo paulo aliter decurrit quam priores. Quoad summam prorsus eodem quo illae recurrit.

Methodus tertia. — Potest etiam semper in *prima* differentiatione subsisti, si nempe *omnes* aequationis datae coefficientes tanquam variabiles tractentur. Sit $x^2 = ux + y$, fiet $2xdx = udx + xdu + dy$. Nunc pone:

$$\frac{du}{dx} = P \qquad \frac{dy}{dx} = Q, \text{ et erit:}$$

$(2 - P)x = u + Q$; unde ejecto x ex hac et data fit:

$$yP^2 - (4y + u^2 + uQ)P + 4y + u^2 - Q^2 = 0, \text{ unde:}$$

$4y + u^2 + uQ = 0$. Unde habetur Q. Cetera nunc sponte consequuntur. Sequitur $x^3 = ux^2 + zx + y$. In cujus differentiali ponendum erit:

$$P = \frac{du}{dx} \qquad Q = \frac{dz}{dx} \qquad R = \frac{dy}{dx}. \text{ Habebis:}$$

$3x^2 = 2ux + x^2P + z + xQ + R$. Orietur ejecto x haec forma:

$$\mathfrak{A}R^3 + \mathfrak{B}R^2 + \mathfrak{C}R + \mathfrak{D} = 0,$$

in qua ponendo $\mathfrak{B} = 0$, $\mathfrak{C} = 0$, incognitae P, Q determinantur. Sic restat bimembris $\mathfrak{A}R^3 + \mathfrak{D} = 0$. Sed si in data cubica, (ut vulgo fit,) membrum ux^2 *abest*, tum differentiando simplicior habetur haec:

$$3x^2 - z - xQ - R = 0.$$

quae cum superiori (Nro. 9. hujus paragraphi) congruit, si modo incognita Q scribatur negative $= -$ Q. Ergo haec tertia methodus tunc plane ut *secunda* methodus decurrit. Ego rem ultra persequi contemno. Hae methodi differentiales a §. 13 inde praestant omnes *idem* omnino, et omnes, ubi rite tractentur, ad *resolutionem* aequationum ducunt. Quare satis habemus, resolutionem hanc seu resolvendi theoriam infra per *unam* harum methodorum exhibere. — Nunc ad rem redeo.

§. 21.

Intuere prudenter et attente reductam nostram § 19, Nro. 6. 7. 8, nam omnes tres unum idemque sunt. Nominatim tamen hic de forma *tertia*, $u^5 + 5u^3 + 10u^2 = y$ loquar. Haec est nempe ea, quae ex reducta:

$$\mathfrak{A}Q^5 + \mathfrak{B}Q^4 + \mathfrak{C}Q^3 + \mathfrak{D}Q^2 + \mathfrak{E} = 0$$

ponendo $\mathfrak{B} = 0$ *residua* manserat. Et quamvis hanc:

1) $$u^5 + 5u^3 + 10u^2 = y$$

resolvere *nondum* possumus, ea tamen facilior, tractabilior et resolubilior necessario quam *proposita* $x^5 = ax + y$ esse debet. Imo istam (1) pro *labefactata* saltim vel *Semi*-resoluta sursolida declarabimus. Videamus ergo, quae *sit* ea praerogativa majoris facilitatis, qua nostra (1) gaudet. Habet ea *Criterium* quoddam *finale*, quod nempe differentiando pro $dy = 0$ et deinde ejecto u, sub forma $Y = 0$ conspicuum fit. In hac $Y = 0$, sursolido casu adscendit potestas ipsius y ad *quartam* dimensionem, ut supra (§. 6, Nro. 4) vidimus. Et habet ergo criterium hoc factores *quatuor* quoad y; quos factores praecise nunc *quaerimus*. — Quia autem differentiale istius (1) admittit *decompositionem*:

2) $$u(u + 1)(u^2 - u + 4) = 0,$$

ideo molestiori eliminatione radicis u ex (1) et (2) non opus est, sed immediate valores u ex (2) in priorem (1) introducuntur. Sic patebit, pro:

$u = 0$ fieri $y = 0$.

$u = -1$ fieri $y = 4$.

Reliquos duos pro y factores obtinebis, istius $u^2 - u + 4 = 0$ radices singulas item in datam (1) introducendo. At vero pulcherrimo successu videbis, pro radice utraque valorem seu factorem obtineri *eundem*, nempe $y + 32 = 0$. Ergo hic factor occurrit *bis*; et nempe pro:

$$u^2 - u + 4 = 0 \text{ fit } (y + 32)^2 = 0.$$

Et sic ergo patet, quod ista (1) criterium $Y = 0$ *tale* habeat:

3) $$[y + 32]^2[yy - 4y] = 0.$$

Jam pro nostra (1) quaeri (per toties dictam regulam) potest aequatio ea, quam hactenus dixi:

$$\frac{dy}{\sqrt{Y}} = \frac{dx}{\sqrt{X}},$$

et quae respectu nostrae (1) jam dicenda est:

4) $$\frac{dy}{\sqrt{Y}} = \frac{du}{\sqrt{U}}, \text{ (posito u pro x.)}$$

Haec (4) jam quoad sinistrum ejus membrum, ultra cubicum gradum $x^5 = ax + y$ non est integrabilis, ut (§. 6) vidimus. Nam casu biquadratico functio Y continet y^3, et sursolido casu imo dignitatem y^4. Et sic deinceps. — At vero jam istam (3) intuere! — Ea docet, nostram (4) ita sonare:

5) $$\frac{dy}{[y+32]\sqrt{[yy-4y]}} = \frac{du}{\sqrt{U}}.$$

Et sic patet igitur, quae sit praecise ea *praerogativa*, quâ aequatio reducta (1) prae primitiva $x^5 = ax + y$ gaudet. Reducta $u^5 + 5u^3 + 10u^2 = y$ nempe criterium finale $\frac{dy}{\sqrt{Y}}$ *integrabile* habet. Ut intuitus (5) docet. Id est, si $x^5 = ax + y$, ope resolventis $\mathfrak{B} = o$ ad formam reducatur $\mathfrak{A}Q^5 + \mathfrak{C}Q^3 + \mathfrak{D}Q^2 + \mathfrak{E} = o$, tum haec residua characterem dicto sensu *integrabilem* lucratur. Unde patet, quanta difficultatum pars, quae primitivam premebant, reductionis ope superata et *excussa* sit.

§. 23.

Et sic jam sponte indigitatur, quid *porro* laboris restet, et quo pacto reliquum cossae stadium prospero successu emetiendum sit; nempe reductam:

1) $$u^5 + 5u^3 + 10u^2 = y$$

denuo reducendo ad *secundariam* reductam, ejusdem (§ 17) methodi beneficio; et secundariam, si opus fuerit, porro ad reductam *tertiam*. Nam cum *prima* reducta (1), tantâ jam vi et integrabilitate polleat, *absolute* aliter fieri nequit, quin secundaria *novam* difficultatum partem excussam sistat, reducta tertia *itidem* novam, et sic deinceps, donec sursolida quercus cumulatis ictibus *sternatur* tandem. Quod praecise imo in ipsa *Cabbala* quoque sic fieri videbimus. At in *praesenti* aequationum reductarum theoria, nescio quo fato accidit, ut ad scopum *non* venirem. Quaerendo nempe pro (1) Secundariam, fit:

$$[illegible]\ \frac{u^5 + 5u^3 + 10u^2 - y}{[illegible] + p} = \frac{o}{o} \text{ et } \frac{5u^4 + 15u^2 + 20u}{[illegible]} = P.$$

Haec ultimâ ponendo $m = 2n$, $P = \frac{5}{2} Q$ praebet:

2) $$u^4 + 3u^2 + [4 - Q]u + nQ = o. \text{ Et ejecto u ex (1. 2):}$$

3) $$[n^5 + 5n^3 + 10n^2 - y]Q^5 + 5[3n^4 + (24 + y)n^3 + 36n^2 + yn - 2y]Q^4 + 5(y + 32)(4n^3 + 8n^2 + yn)Q^5 + 5(y + 32)[(16 - y)n^2 + 6yn + 3y]Q^2 + [y + 32][yy - 4y] = o. \text{ Breviter:}$$

4) $$\mathfrak{A}Q^5 + \mathfrak{B}Q^4 + \mathfrak{C}Q^3 + \mathfrak{D}Q^2 + \mathfrak{E} = o.$$

Posui jam $\mathfrak{B} = o$, et *nihil* reperi. Literam y ex hac $\mathfrak{B} = o$ in istam (3) more meo *introduxi*, et *nihil* reperi; praeter saepe dictam Divisibilitatem. Loco $\mathfrak{B} = o$ suspicabar, num praesenti casu forsan requiratur positio $\mathfrak{C} = o$, at nihil reperi. Aequatio residua semper *prolixior*, *hirsutior*, *minusque* ad apparentiam resolubilis quam ista (1) *ipsa* in oculos cadebat. Quoniam autem *absolute* necesse est, ut secundaria magis tractabilis et resolubilior specialiorque quam sua *praecedens* existat, ideo jure suspicor, quod ipsa potius *facilitas* rei quodammodo obstet, quo minus ad rectam manipulationem calculi emergere potuerim; et forsan alii feliciores erunt. Suspicor nempe, quod methodus $P = \frac{o}{o}$, si ad reductas vel *speciales* aequationes adplicatur, admittat artificium quoddam seu levamen, quo neglecto seu praeterviso res rursum in calculos *intractabiles* excurrat, et omnis efficacia methodi rursum in auras abeat. Et calculando imo eo evasi, ut suspicionem hanc, quam justa sit, lectoribus ad *oculos*

demonstrare possim. — Aequatio (1) nempe parumper *transformetur*, ita ut ille factor $y+32$ conspicuus fiat (§. 22, Nro. 3), — et scribatur:

5) $$u^5+5u^3+10u^2+32=y+32.$$ Decomponetur:
$$(u+2)(u^2-u+4)^2=y+32,$$ vel:

6) $$[u^2-u+4]\sqrt{[u+2]}=\sqrt{[y+32]}.$$

Ponatur jam $\sqrt{[u+2]}=q$ et $\sqrt{[y+32]}=w$. Sic loco (6) fit:

7) $$q^5-5q^3+10q=w.$$

Et ad hanc *transformatam* jam adhibeatur methodus:

$$\frac{q^5-5q^3+10q-w}{q^2-mq+r}=\frac{0}{0} \text{ vel } \frac{5[q^4-3q^2+2]}{2q-m}=P. \quad \text{Vel } [\text{si } m=2n, P=\frac{5}{2}Q]:$$

8) $$q^4-3q^2-Qq+nQ+2=0.$$ Ex hac et (7) ejecto q fit:

9) $$[n^5-5n^3+10n-w]Q^5-5[2n^4-wn^3+2n^2+wn-4]Q^4$$
$$+5[12n^3-8wn^2+(24+ww)n-4w]Q^3$$
$$-5[(24-ww)n^2+4wn+ww-48]Q^2+(ww-32)(ww-36)=0.$$

Breviter: $\mathfrak{A}Q^5+\mathfrak{B}Q^4+\mathfrak{C}Q^3+\mathfrak{D}Q^2+\mathfrak{E}=0$. Fiat $\mathfrak{B}=0$ id est:

10) $$2n^4-wn^3+2n^2+wn-4=0.$$ Et decomponendo:

11) $$[n^2-1][2n^2-wn+4]=0.$$

Id quod *manifeste* specialitatem praesentium functionum et conatum naturae circa cossam sursolidam indicat. — At vero succedit jam alterum et multo exoptatius miraculum. Intuere nempe in (9) coefficientem *tertium* quoque, seu $\mathfrak{C}$ dictum. Is nimirum et *ipse* quoque decomponitur, praecise sic:

12) $$[6n-w][2n^2-wn+4].$$

ubi factor dexter congruit cum dextro *superiori* (11). Ergo ambo coefficientes $\mathfrak{B}$ et $\mathfrak{C}$ evanescunt *simul*, et pro:

$$\mathfrak{B}=0 \text{ fit quoque } \mathfrak{C}=0.$$

Et sic ergo ipso *facto* vides, quâ efficaciâ, (ut asserueram,) etiam *Secundaria* reducta polleat, dummodo primaria (1) levi mutatione in formam (7) prius redigatur! — Haec secundaria nempe efficit, ut jam pro $\mathfrak{B}=0$, duo coefficientes *simul* excidant. Ideoque certe divinamus, quod haec secundaria (si debito modo tractetur,) possit ad reductam *tertiam* revocari, quae tertia pro $\mathfrak{B}=0$, non modo efficiat simul $\mathfrak{C}=0$, sed et simul *tertium* coefficientem $\mathfrak{D}=0$ evanescere faciat. Quo facto residua *bimembris* ideoque *resolubilis* restabit. — Spes haec divinatrix multo *magis* etiam fundata est, quam illa prior fuerat. Vidimus enim efficaciam reductionis ad *primariam*; et vidimus jam porro efficaciam reductionis a primariâ ad *Secundariam*. Quidni ergo de efficacia reductionis a secundaria ad *Tertiam* dubitabimus? Quâ nempe fiat, ut posito $\mathfrak{B}=0$, jam *omnes* tres intermedii $\mathfrak{B}, \mathfrak{C}, \mathfrak{D}$ *simul* evanescant, fiatque nempe $\mathfrak{B}=0 \quad \mathfrak{C}=0 \quad \mathfrak{D}=0$.

§. 24.

Imo vero et *hanc* divinationem, quod justa sit, lectoribus quodammodo ad oculos demonstrare contigit. — Cum enim (§. 23) pro $\mathfrak{B}=0$ sit simul $\mathfrak{C}=0$, ideo restat $\mathfrak{A}Q^5+\mathfrak{D}Q^2+\mathfrak{E}=0$; id est (ibid. Nro. 9) restabit:

1) $$[n^5-5n^3+10n-w]Q^5-5[(24-ww)n^2+4wn+ww-48]Q^2$$
$$+[ww-32][ww-36]=0.$$

Ex $\mathfrak{B}=0$ jam, id est ex $2n^2-wn+4=0$ introducatur ut semper hactenus literae w valor in praecedentem (1). Orietur (ut semper) jucunda illa *Divisibilitas*; et quidem praecise per $[n^2-1][n^2-2]^2$. Et habebitur:

2) $$n^3Q^5+20n^2Q^2+16[nn-4]=0.$$

Quae posito $Q = -2V\sqrt[5]{n^{-1}}$ ita sonat:

3) $$2V^5 - 5V^2 = y. \text{ (ubi } y = \frac{nn-4}{\sqrt[5]{n^4}}\text{)}.$$

Quae est ergo secundariae nostrae (1) expressio *compendiaria*. Et haec jam reducenda est ad *tertiam!* Ergo fit:

$$\frac{2V^5 - 5V^2 - y}{V^2 - mV + p} = \frac{0}{0} \text{ ergo } \frac{10[V^4 - V]}{2V - m} = P. \text{ Vel (si } m = 2n,\ P = 5Q\text{):}$$

4) $V^4 - (1 + Q)V + Qn = 0$. Ex hac et (3) ejecto V fit:

5) $8[2n^6 - 5n^3 - y]Q^5 + 10[4yn^3 + 18n^2 + 2y]Q^4$
$- 10[4yn^3 + 27n^2 - 2yyn - y]Q^3 + 15[9n^2 - 2y^2n - 3y]Q^2 + y^4 + 27y = 0.$

Vel 6) $\mathfrak{A}Q^5 + \mathfrak{B}Q^4 + \mathfrak{C}Q^3 + \mathfrak{D}Q^2 + \mathfrak{E} = 0.$

Hic in termino $\mathfrak{B}$ cernis deesse dignitatem competentem altissimam n^4. Quod indicio est, nos ad *simpliciores* jam functiones esse delapsos. — Ceterum si nunc ex ordine fit $\mathfrak{B} = 0$, cum dolore animadvertes, neutiquam simul fieri $\mathfrak{C} = 0$, nedum porro $\mathfrak{D} = 0$. Neque enim communis aliquis *factor* praesto est. Et sic ergo tertia reducta nostra minatur *abstrusioris* formae fieri, quam ipsa *proposita* $2V^5 - 5V^2 = y$ fuerat. Id quod *superiori* etiam casu ita fuit. — At quemadmodum ibi (§. 23) per levem *Transformationem* datae $u^5 + 5u^3 + 10u^2 = y$ in istam $q^5 - 5q^3 + 10q = w$ feliciter quaesito satisfecimus, ita sine dubio in *praesenti* etiam casu aliquid simile locum habet; et immediata nempe $2V^5 - 5V^2 = y$ prius *Transformationem* aliquam subire debet, priusquam praestanda praestare possit. — At vero in hac transformatione, (sive utcunque artificium illud requisitum dixeris,) ingenii vires defecere. — Sed ne me *vana* sperare arguas, quaeso jam *sequens* miraculum contemplare, quod ad oculos lectoris demonstro. Loco istius (5) scribe retentis coefficientibus numericis:

7) $$8\mathfrak{A}Q^5 + 10\mathfrak{B}Q^4 - 10\mathfrak{C}Q^3 + 15\mathfrak{D}Q^2 + \mathfrak{E} = 0.$$

[*Probe* igitur nota, scriptionem (6) *non* amplius valere.] Considera nunc in ista (5) membrum Q^3. Ante oculos habes:

8) $$\mathfrak{C} = 4yn^3 + 27n^2 - 2yyn - y.$$

Aequationem hanc sequenti modo in *duas* partes discerpe, nempe in partem superiorem et inferiorem:

9) $$\mathfrak{C} = 4yn^3 + 18n^2 + 2y$$
$$+ 9n^2 - 3y - 2yyn.$$

Operatio justa est, ut vides; nam addendo utramque partem redit *praecedens* (8). — Et jam cito hanc (9) comparabis cum ista (5)! Videbis partem *superiorem* esse praecise *membrum* $\mathfrak{B}$, et partem *inferiorem* esse praecise *membrum* $\mathfrak{D}$ (7). Id est pro (7) habetur:

10) $$\mathfrak{C} = \mathfrak{B} + \mathfrak{D}.$$

Et pro eadem ergo scribi nunc poterit:

11) $$8\mathfrak{A}Q^5 + 10\mathfrak{B}Q^4 - 10[\mathfrak{B} + \mathfrak{D}]Q^3 + 15\mathfrak{D}Q^2 + \mathfrak{E} = 0.$$

Atque *haec* est igitur forma *tertiae* reductae. Reducta *Secundaria* exhibuit, ut vidimus, $\mathfrak{B} = 0$, $\mathfrak{C} = 0$ *simul*. Et saltim *idem* ad minimum, sperari debuit pro hac *tertia* reducta. Eventus jam non quidem respondit. Sed si *respondisset*, et fuisset $\mathfrak{B} = 0$, $\mathfrak{C} = 0$, vide quam mirabili successu tunc etiam coefficiens *tertius* evanuisset, fuissetque $\mathfrak{B} = 0$, $\mathfrak{C} = 0$, $\mathfrak{D} = 0$. Nam si $\mathfrak{B} = 0$, et $\mathfrak{C} = 0$, tum ob $\mathfrak{C} = \mathfrak{B} + \mathfrak{D}$ fuisset et $\mathfrak{D} = 0$. Et remansisset ergo desideratus casus *bimembris* pro aequatione residua! — Unde natura calculi manifeste *destinaverat* hunc eventum, et in suis *recessibus* habuit, et apertum *pruritum* cossicum, hoc tertiae reductae casu jam *omnes* tres $\mathfrak{B}, \mathfrak{C}, \mathfrak{D}$ coefficientes exstinguendi, monstrat, sicut pro secundaria *duos* $\mathfrak{B}, \mathfrak{C}$ exstinxerat. Et huic successui in actum deducendo, exspectaverat unice *transformationem* quandam, (seu quidquid id sit,) quae superiori casu tam felici

instinctu *detecta* fuerat. — Atque tam prope igitur in hoc negotio ab ipsa Resolutione abfui! Quare indignabundus quasi ab hac theoria tandem discedo, et ad *Cabbalam algebraicam*, sic enim recte nuncupatur, progredior.

Pars Altera.

§. 15.

Aequationem sursolidam in posterum *sic* scribam $x^5 - * + bx^3 - cx^2 + dx - y = o$, ne mihi respectus ad signa + et — molestus fiat; itemque semper est $a = o$. — Habent aequationes proprietatem quandam, vulgo praetervisam, quam exemplo sursolidae illustrare lubet; nempe quod *pars* radicum exhiberi possit per radices *ceteras*. Nostrae radices dicentur semper x, p, q, r, u. *Symmetricas* autem functiones cum Meier Hirschio dico eas, quae non mutantur, utcunque radices inter se translocentur; seu quod idem est, quae *complete* omnes categoriae suae terminos continent. Sic positis tribus x, p, q radicibus formantur symmetricae functiones $x^n + p^n + q^n$ vel $x^n p^n q^n$, vel etiam $x^m p^n + x^n p^m + x^m q^n + x^n q^m + p^m q^n + p^n q^m$. (Quod *symmetricum*, id et *cossice Homogeneum* dico.)

Positis ergo jam radicibus x, p, q, r, u, exprimendae sint trium x, p, q symmetricae functiones per ambas reliquas r, u. Habetur $x + \ldots = o$, $xp \ldots = b$, et cetera. Has patet, in hunc modum scribi posse:

$$x + p + q = -[r + u]. \qquad M)$$
$$[x + p + q][r + u] + ru + xp + xq + pq = b.$$
$$[x + p + q]ru + [xp + xq + pq][r + u] + xpq = c.$$

Ex prima substitue $x + p + q$ in secundam, itemque in tertiam. Quo facto ex secunda valorem $xp + xq + pq$ substitue in tertiam. Sic ante oculos habebis:

1) $x + p + q = -[r + u].$

2) $xp + xq + pq = b + r^2 + ru + u^2.$

3) $xpq = c - b[r + u] - [r^3 + r^2u + ru^2 + u^3].$

Jam cum omnis literarum x, p, q functio homogenea resolvi in has tres possit $x + p + q$ et $xp + xq + pq$ et xpq, ergo omnis radicum x, p, q homogenea functio potest exhiberi per functionem reliquarum radicum r et u. — Sint jam porro radicum *quatuor* x, p, q, r symmetricae functiones exprimendae per solam *quintam* u. — Casu hoc aequationes primitivae (M) aliter jam et *sic* scribendae sunt:

$$x + p + q + r = -u$$
$$[x + p + q + r]u + xp + xq + xr + pq + pr + qr = b$$
$$[xp + xq + xr + pq + pr + qr]u + xpq + xpr + xqr + pqr = c.$$

Nunc introduc $x + p + q + r$ ex prima in secundam; quo facto introduc $xp + \ldots$ ex secunda in tertiam, deinde habebis:

4) $x + p + q + r = -u$

5) $xp + xq + xr + pq + pr + qr = b + u^2$

6) $xpq + xpr + xqr + pqr = c - bu - u^3.$

7) $xpqr = d - cu + bu^2 + u^4.$

(Praesenti casu nempe ad *quaternionem* etiam xpqr progrediendum est. Est $xpqr + \ldots = d$; quae aequatio scribi potest:

$$xpqr + u[xpq + xpr + xqr + pqr] = d.$$

in qua terniones $xpq+\dots$ ex (6) subrogando oritur (7)]. Jam cum omnis literarum x,p,q,r functio homogenea resolvi possit in has quatuor formas $x+p+q+r$ et $xp+\dots+qr$ et $xpq+\dots$ et $xpqr$, ergo omnis radicum x,p,q,r functio homogenea exhiberi potest per functionem radicis *quintae* u. Quoniam infra nonnullae ejusmodi functiones *opus* erunt, ideo (ne me ibi intempestive interpellem,) illas hoc loco in usus futuros praevie subjungo. Istas (4—7) breviter scribe sic:

8) $x+\dots=A,\ xp+\dots=B,\ xpq+\dots=C,\ xpqr=D.$

Pro his (8), quae singulae per *Se* sunt symmetricae, quaeramus jam quasdam altiores functiones symmetricas. Quaerenda sit verbi causa functio $x^m p^n+\dots$ id est quaeritur ejus expressio per A,B,C,D; id est per quintam radicem u. Ex (5) patet, biniones ut xp existere numero *sex*. Ergo cum tale membrum *duos* casus praebeat, $x^m p^n$ vel $x^n p^m$, ideo dicta functio symmetrica habebit terminos *duodecim*. Similiter ponatur functio symmetrica $x^m p^n q^t+\dots$ exprimenda per A, B, C, D. Ex (6) patet, existere ternionum ut xpq non plures quam quatuor. Sed in singulâ xpq, exponentes m, n, t disponi possunt *sex* vicibus, ergo functio symmetrica $x^m p^n q^t+\dots$ sistet membra *viginti quatuor*. Qui numerus autem pro $n=t$ ad *duodecim* relabitur, quia tum verbi causa $x^m p^n q^t = x^m p^t q^n$. — Sed haec doceri debent in compendiis. Ego solummodo pro aliquibus ejusmodi formis radicum x, p, q, r symmetricis subjungo expressionem cossicam per A, B, C, D, id est per quintam radicem u. Est nempe:

9) $x^4p+\dots=A^3B-3AB^2+AD+5BC-A^2C.$

$x^3p^2+\dots=AB^2-2A^2C+5AD-BC.$

$x^3pq+\dots=A^2C-2BC-AD$

$x^2p^2q+\dots=BC-3AD.$

Sic te docebit vel proprius calculus, vel Meierhirschii tabula, ubi hae formulae prostant. Repositis jam $A=-u$, $B=b+u^2$ et porro, functiones has symmetricas omnes per meram quintam radicem u expressas habebis.

§. 26.

His praemissis jam formulam cabbalae expono. — Sit $x^2=ax+y$, radicum x,p, ergo $x+p=a$, $dx+dp=o$. Ejecto a ex duabus prioribus aequationibus fit $px+y=o$, ergo $pdx+xdp+dy=o$. Et ab $dp=\frac{dy}{dx}$ ~~$x-p$~~. Atque haec est *Cabbala*; quae nempe pro omni resolvendae gradu non plures quam *duas* radices resolvendae continet. —

Sit $x^3=ax+y$ radicum x, p, q. Ejecto q ex:

1) $x+p+q=o$ et 2) $xp+xq+pq=-a$, fit:

3) $x^2+px+p^2=a$. Ex (3) et datâ ejecto a fit:

4) $x^2p+p^2x+y=o$. Has (3.4) bis differentiando fit:

5) $dx^2+dpdx+dp^2=o.$

6) $4xdxdp+4pdxdp+2pdx^2+2xdp^2+d^2y=o.$

Posito in (5) $dp=\alpha dx$, habetur: 7) $1+\alpha+\alpha\alpha=o.$

Pariter in (6) introduc $dp=\alpha dx$, et porro $\frac{d^2y}{2dx^2}=w$; fit:

8) $[2\alpha+\alpha\alpha]\,x+[2\alpha+1]\,p+w=o.$

Breviter $Ax+Bp+w=o$. In A pone pro $\alpha\alpha$ valorem ex (7); in B pone pro 1 valorem item ex (7), et habebis:

$[\alpha-1]\,x-\alpha[\alpha-1]\,p+w=o.$ Positoque $w=[\alpha-1]\,t$:

9) $t=\alpha p-x.$

Quae est cabbala *cubicae*; continens nempe *duas* radices x,p et non plures.

Sequitur 10) $x^4=ax^2+bx+y$. Eam divide per $x-p$. Fiet:

11) $x^3+px^2+[p^2-a]\,x+p^3-ap=b.$ Ex (10.11) ejecto b fit porro:

12) $px^3 + p^2x^2 + p^3x + y = apx$. Singulam (11 . 12) differentiabis ter, deinde in novis resultantibus pone $dp = \alpha dx$, et porro $\frac{d^3y}{6dx^3} = w$, sic loco (11 . 12) habebis respective: 13) $1 + \alpha + \alpha^2 + \alpha^3 = 0$.

14) $[\alpha^3 + 2\alpha^2 + 3\alpha] x + [1 + 2\alpha + 3\alpha^2] p + w = 0$.

Prior (13) factorem habet $\alpha^2 + 1 = 0$; pone ergo $\alpha = \sqrt{-1}$ in (14), et pone $w = -2[-1 + \sqrt{-1}] t$, sic loco (14) fit: 15) $t = x + p$. Quae est cabbala *biquadraticae*; continens duas x, p, nec plures.

§. 27.

Sit: $x^5 + bx^3 - cx^2 + dx - y = 0$, radicum x, p, q, r, u. Divisa per $x - p$ fit: 2) $x^4 + px^3 + [p^2 + b] x^2 + [p^3 + bp - c] x + p^4 + bp^2 - cp + d = 0$. Ex data et (2) ejecto d fit:

3) $px^4 + p^2x^3 + p^3x^2 + p^4x + b[px^2 + p^2x] - cpx + y = 0$.

Singulam (2 . 3) differentiabis quater; in resultantibus pones $dp = \alpha dx$ et porro $\frac{d^4y}{24dx^4} = w$, sic loco (2. 3) fiet respective:

4) $1 + \alpha + \alpha^2 + \alpha^3 + \alpha^4 = 0$.

5) $[\alpha^4 + 2\alpha^3 + 3\alpha^2 + 4\alpha] x + [1 + 2\alpha + 3\alpha^2 + 4\alpha^3] p + w = 0$.

Pro (5) breviter $Ax + Bp + w = 0$. Reperies esse $A = -\alpha^2 B$, ergo $-\alpha^2 Bx + Bp + w = 0$. Unde pro $w = Bt$ fit $t = \alpha^2 x - p$. Sed α^2 exprimit promiscue unam ex radicibus $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ hujus $z^5 - 1 = 0$. Ergo scribendum:

6) $t = \alpha x - p$.

Quae est cabbala *sursolidae*; continens duas x, p, nec plures. Sic patet progressus ad *altiores* casus cabbalae. Pro imparibus gradibus habetur semper forma $t = \alpha x - p$. (Pro *paribus* res cadit *simplicior* paulum, sed bimembris item.) — Ut perspicias autem, sermonem hic esse non de *particulari* aliquo artificio, quasi *extorto* per calculum differentialem, respice cito (§. 14, Nro. 6—7). Ibi enim primum occurrunt aequatiunculae hujus formae $dp = \alpha dx$. Quas (Aetate arg.) olim nondum intellexeram, et imo (quod ridiculum est,) illas integrari *vetueram*. At vero integrando sistunt $C = \alpha x - p$. Ecce ergo ipsissimam formulam *Cabbalae*. Nempe quod heic litera t dicitur, illic per literam C seu sub forma *constanti* exhibetur. At id mirum *non* est. Vidisti enim, quod (loco cit.) homogeneae formulae differentiales ortae sint ex *libera* et mera differentiatione harum $x + \ldots = 0$, $xp + \ldots = a$, et cetera; et nempe differentiationem continuatam subjiciunt sine *ullo* respectu ad y, seu differentiatae sunt ab y *independenter*. Ergo et illarum, ut ita dicam, factores $dp = \alpha dx$, et cetera, integrando sistunt meram *constantem* C, valoris y nempe prorsus *nesciam*. — At in *praesenti* theoria, ad cabbalam exhibendam variabilis y non modo in *concursum* venerat, sed imo pro *basi* operationis fuerat; nimirum est (R.) $t = \frac{d^n y}{dx^n}$, vel quasi. — Nunc ad rem redeo.

Casus *cubicae* $x^3 = ax + y$, radicum x, p, q. Cabbala $t = x - \alpha p$, (§. 26, Nro. 9). Nam t nunc negative scribo, quia nil refert. Sic oriuntur jam *sex* valores:

7) $t' = x - \alpha p$ 9) $t''' = p - \alpha x$ 11) $t^{V} = q - \alpha x$

8) $t'' = x - \alpha q$ 10) $t^{IV} = p - \alpha q$ 12) $t^{VI} = q - \alpha p$.

Elige permutationem *duarum* q, p; nempe ex (10 . 12) formabis quadraticam $t^2 - (1 - \alpha)(p + q) t + (1 + \alpha\alpha) pq - \alpha (p^2 + q^2) = 0$. Hic pone $p + q = -x$, et $1 + \alpha\alpha = -\alpha$. Erit:

$t^2 + (1 - \alpha) xt - \alpha (p^2 + pq + q^2) = 0$. Sed (§. 26, Nro. 3) $p^2 + pq + q^2 = a$, ergo $t^2 - (\alpha - 1) xt - \alpha a = 0$. Haec posito $t = (\alpha - 1) u$ evadit:

13) $u^2 = xu - \frac{a}{3}$. Quae est *relationalis*.

(Si tibi vel hoc vel alio casu *aliud* quid resultat, pone modo valorem tuum subinde meo aequalem; et constabit assertum. Nam functiones radicum α sunt quasi Chamaeleontes, et modo sub hac modo

sub illa forma prodeunt.) Similiter ex (7.9) formabis relationalem, itemque ex (8.11). Quae tres in se ductae dabunt *Resolventem*; prorsus ut (§. 15, Nro. 13). — Sequitur nunc decisiva et magni momenti observatio. Sicut nempe hic resolventem conflavi ex tribus *quadraticis* (13), sic eadem conflatur ex duabus *cubicis*, et eligendi sunt in hunc finem *tales* (7—12) tres, in quibus radices x, p, q in *cyclum* redeant:

14) $t' = x - \alpha p \qquad t^{IV} = p - \alpha q \qquad t^{V} = q - \alpha x.$

15) $t'' = x - \alpha q \qquad t^{VI} = q - \alpha p \qquad t''' = p - \alpha x.$

Cernis (14) manifestum cyclum (x, p) (p, q) (q, x); et (15) cyclum (x, q) (q, p) (p, x). Neque pro cubica plures cycli quam dicti praecise (14.15) eligi possunt, nec ergo oritur operationum ambigua Multiplicitas. — Accipe nunc *proprietatem* omnis cycli cabbalistici. Ejecto x, q ex istis (14), itemque ex istis (15), habebis respective:

16) $t^{IV} + \alpha t^{V} + \alpha^2 t' = 0.$ 17) $t^{VI} + \alpha t''' + \alpha^2 t'' = 0.$

Has perpetuo comitantur (ut Nro. 14 et 15 docet) istae:

18) $t^{IV} + t^{V} + t' = 0.$ 19) $t^{VI} + t''' + t'' = 0.$

Ex (16.18) fit: 20) $t^{IV} = \alpha t'. \qquad t^{V} = \alpha^2 t'.$

Ex (17.19) fit: 21) $t^{VI} = \alpha t''. \qquad t''' = \alpha^2 t''.$

Hae (20.21) docent, ex cyclis ambobus (14.15) orituram esse formam *quadraticam* tantum $t^6 - Mt^3 + N = 0$; ut constat. Verbi causa in tribus (14) reponendo $q = -x - p$, habebis:

$$t' = x - \alpha p \qquad t^{IV} = \alpha[x - \alpha p] \qquad t^{V} = \alpha^2[x - \alpha p].$$

unde constat assertum. Sic fit $t^3 - [x - \alpha p]^3 = 0$, factor *unus*. Similiter (15) reposito $q = -x - p$ fit:

$$t''' = p - \alpha x \qquad t'' = \alpha[p - \alpha x] \qquad t^{VI} = \alpha^2[p - \alpha x].$$

Ergo $t^3 - [p - \alpha x]^3 = 0$; factor *alter*. Productum est $t^6 - Mt^3 + N = 0$. Et reperies $M = 3\alpha(\alpha - 1) xp(x + p)$, id est $M = 3\alpha(1 - \alpha)xpq$, ergo $M = 3\alpha(1 - \alpha)y$. Similiter quaeres N; et habebis (positione toties jam usurpata $t^3 = nu$) valorem Cardani $u^2 = yu - \frac{a^3}{27}$. Sed si *immediate* istas (14) multiplicas, (nempe *retento* q), itemque istas (15), tum respective habebis:

$$t^3 = \alpha^2[p^2x + x^2q + q^2p] - \alpha[px^2 + xq^2 + qp^2]. \quad \text{Breviter: } t^3 = \alpha^2 H' - \alpha H''$$

$$t^3 = \alpha^2[px^2 + xq^2 + qp^2] - \alpha[p^2x + x^2q + q^2p]. \qquad t^3 = \alpha^2 H'' - \alpha H'.$$

Has H′, H″ attente contemplare. Cernis eas esse functiones cyclicas et *Semi*-symmetricas, nec praeter has ipsas H′, H″ cyclum alium hujus formae deprehendes. Ergo earum *productum* sistet vel restituet *symmetriam*; id est posito:

22) $H^2 - \pi H + \lambda = 0$, radicum H′, H″;

erunt jam π, λ *symmetricae*, ideoque per α, γ habentur. — Et jam cabbala cubica satis patet. — Sequeretur $t = x + p$, seu cabbala *biquadraticae* (§. 26, Nro. 15). Sed id nihil ad nos spectat. Qui rem lustrat, eam perquam facilem sentiet. Ceterum functio $t = x + p$ *supra* jam (§. 7 M) ad resolutionem adhibita fuit.

§. 28.

Sequitur cabbala *sursolidae*; quae est $t = -\alpha x + p$ (§. 27, Nro. 6) (Praefero enim, literam t negative scribere.) — Hic jam combinationes radicum exhauriendo, ante oculos erunt cohortes *quinque* et radices t ergo *viginti*:

1) $t' = -\alpha x + p$	2) $t^{V} = -\alpha p + x$	3) $t^{IX} = -\alpha q + x$
$t'' = -\alpha x + q$	$t^{VI} = -\alpha p + q$	$t^{X} = -\alpha q + p$
$t''' = -\alpha x + r$	$t^{VII} = -\alpha p + r$	$t^{XI} = -\alpha q + r$
$t^{IV} = -\alpha x + u$	$t^{VIII} = -\alpha p + u$	$t^{XII} = -\alpha q + u$

4) $t^{XIII} = -\alpha r + x$
$t^{XIV} = -\alpha r + p$
$t^{XV} = -\alpha r + q$
$t^{XVI} = -\alpha r + u$

5) $t^{XVII} = -\alpha u + x$
$t^{XVIII} = -\alpha u + p$
$t^{XIX} = -\alpha u + q$
$t^{XX} = -\alpha u + r$

Hae *viginti* respondent istis *sex* (§. 27, Nro. 7—12). — Et cohortium singula dabit pro t *biquadraticam*, quae est relationalis *primi* generis, ut videbimus, et quae consentiet cum superiori (§. 13, Nro. 10). Hac relationali autem non utar; ergo parce labori. *Omnes* autem viginti dabunt aequationem $t^{20} - At^{19} + \ldots V = 0$; in qua ob symmetriam perfectam coefficientes A, B .... omnes per b, c, d, y exhibebuntur. Et sicut casu cubico prodiit pro t aequatio finalis *sexti* gradus, quae vero ob relationem inter radices datam (§. 27, Nro 20—21) instar *quadraticae* tractari ideoque *resolvi* poterat, sic inter nostras viginti radices existunt relationes numero sufficientes, ut nostra *vicesima* possit resolvi. Res *altius* autem sedet. — Hac vicesima ceterum non utar, ergo parce labori. Nam si sursolidae resolutionem *hac* via persequi voluissem, liber hic duplo majoris voluminis evasisset. — Dixi nostris viginti valoribus multas *relationes* esse. *Intuere* cohortes nostras. Habebis $t' - t'' = t^{XIV} - t^{XV}$, et similes; habebis porro $t^{V} - t^{IX} = \alpha[t'' - t']$, et similes. Et alias porro relationum formas. Quibus omnibus autem nihil utar.

§. 29.

Ago nunc de *cyclis* cabbalae sursolidae. Sume proximum quemque ex cohortibus nostris cyclum, qui instar omnium sit:

1)
$$t' = -\alpha x + p$$
$$t^{VI} = -\alpha p + q$$
$$t^{XI} = -\alpha q + r$$
$$t^{XVI} = -\alpha r + u$$
$$t^{XVII} = -\alpha u + x.$$

Ante oculos est nempe successio cyclica in se rediens, x, p et p, q et q, r et r, u et u, x. Ex his (1) ejecto x, p, q, r habetur ista magna *proprietas* (quam supra dixi et detexi):

2)
$$t^{XVI} + \alpha t^{XI} + \alpha^2 t^{VI} + \alpha^3 t' + \alpha^4 t^{XVII} = 0.$$

Claritatis causa dictum cyclum praesentem ita scribo:

3) xp pq qr ru ux

Vel etiam solam sequelam literarum attendendo, scribatur: xpqrux.

Tales cyclicae quinterniones (1) existent *quatuor*, quibus nempe omnes viginti (§. 28) exhauriuntur. Accipe verbi causa *secundam* quinternionem cyclicam: $t''' = -\alpha x + r$, $t^{XIV} = -\alpha r + p$, $t^{VIII} = -\alpha p + u$, $t^{XIX} = -\alpha u + q$, $t^{IX} = -\alpha q + x$. Cyclus hic est ergo xr rp pu uq qx. Breviter xrpuqx. Quinternio *tertia*: $t'' = -\alpha x + q$, $t^{XII} = -\alpha q + u$, $t^{XVIII} = -\alpha u + p$; $t^{VII} = -\alpha p + r$, $t^{XIII} = -\alpha r + x$. Cyclus hic ergo est xq qu up pr rx; breviter xquprx. — Quinternio ultima: $t^{IV} = -\alpha x + u$, $t^{XX} = -\alpha u + r$, $t^{XV} = -\alpha r + q$, $t^{X} = -\alpha q + p$, $t^{V} = -\alpha p + x$. Cyclus ergo hic est xu ur rq qp px; breviter xurqpx. Ab his quinternionibus cyclicis ergo jam omnes nostrae viginti *exhauriuntur*. Et singula quinternio dabit suam competentem formam (2), si tales formas scire cupias. Ego enim hos omnes cyclos nihil curo. — Ex tali quinternione (1), quae instar omnium sit, formabitur jam aequatio:

4)
$$t^5 - At^4 + Bt^3 - Ct^2 + Dt - E = 0.$$

[Erit autem semper A = 0.] — Similes porro sursolidae per *ceteras* quinterniones obtinentur. Et hae (4), ex quinternionibus obtinendae, dabunt jam, si in se invicem ducantur, illam vicesimam $t^{20} - At^{19} + \ldots = 0$ supra memoratam; cujus vicesimae coefficientes A .... *symmetrici* ideoque per b, c, d, y dati erunt. — Haec (4) aequatio jam habet inter suas radices peculiarem *relationem*, nempe istam (2). (Idem intellige de aequationis (4) conjugatis.) Ideo haec (4) est ex aequationum *specialium* genere,

et ergo longe resolubilior quam proposita generalis $x^5_{\circ} + bx^3 - cx^2 + dx - y = o$. Ergo de resolutione istius (4) non admodum laborandum foret, siquidem pro specialium aequationum resolutione, egregiae regulae tum *dantur*, tum etiam, si opus fuerit, adinveniri de *recenti* possunt. Et sic ergo de hujus (4) *coëfficientibus* potius inveniendis inprimis laboratur.

§. 30.

Jam vero coefficientes hi B, C, D, E videntur et *ipsi* quoque inventionis non valde difficilis esse. Nam cum talium (§. 29, Nro. 4) expressae *quatuor* conjugatae et non plures existant, ergo videtur pro B…E obtineri debere aequatio gradus *quarti* et non altioris. — At vero jam vide, cur id ita fieri nullo modo possit. Hac sola re exposita, lectorem ex hoc labyrintho cyclico in campos Elysiacos, quos olim promisi, subinde reducam. — Quemadmodum enim (§. 29, Nro. 1 et 4) ex prima quinternione obtinebatur:

$$t^5_{\circ} + Bt^3 - Ct^2 + Dt - E = o,$$

sic ex reliquis ibi dictis quinternionibus tres *aliae* tales obtinentur. Id est, habebuntur hae quatuor aequationes:

$$t^5 + B't^3 - C't^2 + D't - E' = o.$$
$$t^5 + B''t^3 - C''t^2 + D''t - E'' = o.$$
$$t^5 + B'''t^3 - C'''t^2 + D'''t - E''' = o.$$
$$t^5 + B^{IV}t^3 - C^{IV}t^2 + D^{IV}t - E^{IV} = o.$$

Ergo qui verbi causa valorem B quaerit, quaerit simul *omnes* quatuor B', B'', B''', B^{IV}, id est B pendebit a biquadratica. — At vero vide nunc difficultatem, quae oritur. Dispositio cyclica, quam (§. 29) exhibuimus, *justa* quidem fuit, ut intuitus ipse docet; sed non est *unica*. Radices $t' \ldots . t^{XX}$ nempe *multis* modis in cyclicas quinterniones distingui possunt, quarum supra (§. 29) *unicam* modum tantum exhibui. Elige verbi causa loco quinternionis cyclicae (§. 29, Nro. 1) hanc *alteram*: $t' = -\alpha x + p$, $t^{VIII} = -\alpha p + u$, $t^{XIX} = -\alpha u + q$, $t^{XI} = -\alpha q + r$, $t^{XIII} = -\alpha r + x$. Haec ergo a superioribus (§. 29) omnibus *diversa* est, ad eamque aggregabuntur *ceterae* tres quinterniones, a superioribus omnibus omnes *diversae*. Praecedens enim quinternio sistit cyclum xp pu uq qr rx, vel breviter xpuqrx. Qui ab superioribus (§. 29) diversus est. At vero aequationis $t^5 + Bt^3 - Ct^2 + Dt - E = o$ coefficientes B…. debent promiscue et *simili* modo has *omnes* varietates vel quinternionum cyclicarum systemata in se complecti, ergo mira hic oritur pro his B, C, D, E perplexitas et multiplicitas; quae casu cubico *non* adfuit, ut ibi expresse monui. — Et *adscendet* ergo vel potius adscendere *videbitur* aequatio pro B ad gradum longe *altiorem*. Nec id ob *multitudinem* valorum, quos B nancisci possit, sed quia radices $t' \ldots . t^{XX}$, cyclice *multis* modis ad quinque et quinque disponi possunt. Exhausi supra nostras viginti $t' \ldots t^{20}$ per *unum* quinternionum cyclicarum systema; at vero exhaurienda sunt quinternionum cyclicarum *systemata* quoque. Id facile fit. Sume quemcunque casum unicum xqrupx. Cernis radicem x ad extremitates utrinque; intus habitant promiscue radices quatuor reliquae p, q, r, u. Quae inter se permutantur 24 vicibus. Et singula talis positio, verbi causa xurpqx resolvetur in cyclum competentem xu ur rp pq qx; quod ad *hanc* praecise quinternionem spectat:

$$t^{IV} = -\alpha x + u; \quad t^{XX} = -\alpha u + r; \quad t^{XIV} = -\alpha r + p; \quad t^{VI} = -\alpha p + q; \quad t^{IX} = -\alpha q + x.$$

Sic omnia systemata exhauriri possunt. Quum ergo singula talis quinternio cyclica ut (§. 29, Nro. 1) det suam singulam $t^5 + Bt^3 - Ct^2 + Dt - E = o$, et quinternionum existant, ut vidimus, viginti *quatuor*, ideo aequatio pro B ad hunc *eundem* gradum adscendere minatur. (Quem numerum tamen sponte ad 12 et imo ad 6 relabi scito; nam satis est historice id monere, quia nihil omnino his omnibus calculis infra superstruam. Sed explicanda tamen aliquatenus res est, in magnam eorum gratiam, qui

hanc expresse pro sursolidae resolutione viam, in qua tam larga inventorum seges est, ingredi olim moliantur.) Res est igitur non modo prolixi *calculi*, sed et per *naturam* suam valde intricata. Concurrit nempe hic *duplex* multiplicitatis genus, a se invicem cum summa cura distinguendum; alterum proficiscitur ab *effectivo* numero radicum t, qui numerus est *viginti*, (§. 28, Nro. 1), et omnino numerus *fixus* est. — Alterum proficiscitur a multiplicitate quaternionum *cyclicarum*, quae multiplicitas mere *combinatoria* et quasi *illusoria* est; quippe quae inveniendorum viginti fixorum t difficultatem per se augere *non* potest, neque numerum fixum quantitatum, quas inveniri oportet, ullo sensu *auget*.

§. 31.

Ceterum non opus est, has $t^6 + Bt^3 - Ct^2 + Dt - E = 0$ pro singula quinternione distincte quaerere. Sed satis est, eam pro *una* aliqua quinternione exhibere. Tum enim ipse intuitus combinationes reliquas ideoque numerum valorum B ob oculos ponet. — Sume verbi causa productum radicum quinternionis (§ 29, Nro. 1). Obtinebis:

$$B = -\alpha(x^2 + p^2 + q^2 + r^2 + u^2) + (1 - \alpha + \alpha^2)(xp + xq + xr + xu + pq + pr + pu + qr + qu + ru) - \alpha(xq + qu + up + pr + rx).$$

Hic membra duo priora ad dextram per *Se* sunt symmetrica, ideoque ultro reducuntur. Est enim $x^2 + \ldots = -2b$, et $xp + \ldots = b$; membrum *ultimum* autem continet quinque biniones, quae cum reliquis binionibus, si adessent, forent $= b$. Id est: $xq + qu + up + pr + rx = b - (xp + pq + qr + ru + ux)$. Sic aequatio induet formam:

1) $$B = (1 + \alpha\alpha)b + \alpha(xp + pq + qr + ru + ux).$$

Terminus $(1 + \alpha\alpha)b$ in omni alia quinternione constans datusque est. Ideo unice ad membrum *ultimum* respicies. Quod membrum praecise *Cyclum* quinternioni nostrae competentem ante oculos sistit. — Ergo pro B inveniendo ponatur:

2) $$T = xp + pq + qr + ru + ux.$$ [Dato enim T, dabitur B.]

Et sic ergo in hac theoria in novum quoddam cyclorum in se redeuntium systema offendimus. Casu *cubico*, seu casu *trium* radicum x, p, q, cyclus $xp + pq + qx$ per *se* datur, nec plures valores admittit. Sed sursolido *quinque* radicum casu, talis cyclus T *multos* casus complectitur, ut vidimus, ideoque T pendet ab aequatione aliqua superiori, quae *resolvi* debet. Quaeritur quot jam dimensionum ea futura sit. Reperies hos *duodecim* casus et non plures:

3)

$T' = xp + pq + qr + ru + ux.$	$T'' = xq + qu + up + pr + rx.$
$T''' = xp + pr + ru + uq + qx$	$T^{IV} = xr + rq + qp + pu + ux.$
$T^{V} = xp + pu + uq + qr + rx$	$T^{VI} = xq + qp + pr + ru + ux.$
$T^{VII} = xp + pr + rq + qu + ux$	$T^{VIII} = xq + qp + pu + ur + rx$
$T^{IX} = xp + pu + ur + rq + qx$	$T^{X} = xr + rp + pq + qu + ux$
$T^{XI} = xp + pq + qu + ur + rx$	$T^{XII} = xq + qr + rp + pu + ux.$

Et hi sunt ergo omnes *Cycli* pro B existentes. Jam vero dicendum est, cur *duodecim* tantum heic cernantur, quum supra quatuor et *viginti* eos numero deprehenderimus; (nimirum si scribas T = x, p, q, r, u, x, vel quasi, tum intermedii p, q, r, u omnino 24 permutationes admittunt.) — Accipe ergo responsum. Pone radicem praecedentium *primam*: (3)

$$T' = xp + pq + qr + ru + ux;$$

quae cyclica forma pertinet, ut vidimus, ad quinternionem (§. 29, Nro. 1), id est ad radices t', t^{VI}, t^{XI}, t^{XVI}, t^{XVII}. — Jam pone porro et *hunc* cyclum:

$$\Delta = xu + ur + rq + qp + px;$$

qui (ut ex cohortibus §. 28, Nro. 1—5 cernis) ad radices, $t^{IV}, t^{XX}, t^{XV}, t^{X}, t^{V}$ pertinet. Sic ergo ex istis 24 cyclis *duos* T' et Δ in conspectu habes. Jam vero cyclum T' inverte et *retro* lege; videbis esse omnino $T' = \Delta$. Id est cuivis quinternioni respondet *alia* quinternio, quae cyclum *eundem* exhibet; tanquam si scriberes $(x, p, q, r, u, x) = (x, u, r, q, p, x)$, vel quasi. Et sic ergo numerus valorum T ab 24 ad 12 relabitur. Ergo pro T seu systemate (3) habebitur aequatio gradus *duodecimi*; nempe istae $T' \ldots T^{XII}$ radices existunt et non plures. — At in hac duodecima habetur:

$$T' + T'' = b,\ T''' + T^{IV} = b,\ T^{V} + T^{VI} = b,\ T^{VII} + T^{VIII} = b,\ T^{IX} + T^{X} = b,\ T^{XI} + T^{XII} = b; \quad A.)$$

(id quod ipse istarum (3) intuitus docet,) ergo si in hac duodecima pro T aequatione ponatur $T = V + \frac{b}{2}$, tum omnes impares dignitates *evanescunt;* siquidem tunc specialiter fit:

$$V' + V'' = 0,\ V''' + V^{IV} = 0,\ V^{V} + V^{VI} = 0,\ V^{VII} + V^{VIII} = 0,\ V^{IX} + V^{X} = 0,\ V^{XI} + V^{XII} = 0.$$

Quae est proprietas aequationis pares dignitates continentis. Ergo habebitur forma:

4) $\quad V^{12} - \mathfrak{A}V^{10} + \mathfrak{B}V^{8} - \mathfrak{C}V^{6} + \mathfrak{D}V^{4} - \mathfrak{E}V^{2} + \mathfrak{F} = 0.$ Quae *Sextae* instar est.

§. 32.

Spatii angustia cogit, in hac materia consulto supprimere quaedam inventa, siquidem hanc methodum praesentem persequi non lubet. Sed non possum tamen, quin in lectorum commodum, praedictae sextae *fundamentalem* saltim *proprietatem* adjiciam. Existit nempe inter istas duodecim T radices (§. 31, Nro. 3) haec *decisiva* ac duplex *relatio:*

1) $\quad T' + T^{VIII} + T^{XII} = T^{IV} + T^{VI} + T^{IX}.$

2) $\quad T'' + T^{VII} + T^{XI} = T''' + T^{V} + T^{X}.$

Quas loco citato sponte a *posteriori* quidem veras deprehendes, sed non tam promte a priori pervideri potuissent. Jam cum $T' = V' + \frac{b}{2}$, $T'' = V'' + \frac{b}{2}$ et cetera, ergo loco (1.2) item erit:

3) $\quad V' + V^{VIII} + V^{XII} = V^{IV} + V^{VI} + V^{IX}.$

4) $\quad V'' + V^{VII} + V^{XI} = V''' + V^{V} + V^{X}.$

Atque sic ergo (§. 31, Nro. 4) habemus pro V aequationem *Sexti* quidem gradus, sed quae elegantissimâ eâque duplici inter ternas radices *relatione* seu *aequalitate* praedita est! — Et his ergo principiis insistet, qui volet. — Invento autem V habetur T, id est B. — Atque sic igitur, quamquam praesentem viam persequi nequaquam in animo sit, aliis quibus lubet, saltim commeatum *analyticum*, ut ita dicam, subvexisse mihi videor. Quare cum Analysi et Analystis in praesenti materia *porro* etiam (indigitando saltim) aliqua bona servitia mea praestare velim, ideo ii, qui ex hoc libro meram sursolidae resolvendae theoriam discere cupiunt, reliqua hujus paragraphi vel historice tantum et *breviter* perlustrent, vel etiam innoxie et salvo sequentium intellectu prorsus *praeterire* possunt. At quibus praesens theoria, tanquam generosum omnino cossae supplementum, curae est, iis certe addendo sequentes porro observationes vel notiones directrices utique pergratum fecerim. Ergo salvum sit mihi, independenter ab omni reliqua hujus libri materia, in paucorum gratiam adjungere meras saltim *regulas.*

Qui duodecimam illam pro T aequationem (§. 31, Nro. 3) concinnare volet, (ego illam in chartis habeo,) is ad minuendam calculi molem, illius loco duas *sexti* gradus quaerat, ex radicibus praecise *his* respective formatas:

$$T'',\ T^{VII},\ T^{XI},\ T^{IV},\ T^{VI},\ T^{IX},\ \text{et}\ T',\ T^{VIII},\ T^{XII},\ T''',\ T^{V},\ T^{X}. \quad \text{(Nro. 1. 2).}$$

Sic oriuntur duae respective sextae *hujus* formae:

5) $\quad T^{6} - k'T^{5} + k''T^{4} - k'''T^{3} + k^{IV}T^{2} - [k^{V} + n\sqrt{Y}]\,T + k^{VI} + m\sqrt{Y} = 0$

6) $\quad T^{6} - k'T^{5} + k''T^{4} - k'''T^{3} + k^{IV}T^{2} - [k^{V} - n\sqrt{Y}]\,T + k^{VI} - m\sqrt{Y} = 0.$

Et reperies $k' = 3b$, $k'' = 3bb - 5d$, $k''' = b^3 - 10bd$

$$k^{IV} = bc^2 - 8b^2d + 15dd - 25cy.$$
$$k^{V} = 15bd^2 + b^2c^2 - 25bcy - 3b^3d.$$
$$2k^{VI} = 2b^2d^2 - 2c^4 + 10d^3 - 50cdy + 7bdc^2 - 15b^2cy + 125byy$$

Quae sunt exactissime omnia computata. Terminus $\sqrt{Y}$ autem est illud *Criterium* toties (P. I) dictum. (Literam n reperio $= 5$, et $m = 15b$.) Quod criterium heic ergo pro completa seu *generali* $x^5 + bx^3 - cx^2 + dx - y = 0$ intelligitur. Quoniam autem non cujusvis est, adeo taediosas eliminationes subire, et (ex causis gravibus parte prima indigitatis, et insuper ad praesentem calculum) utilissimum tamen est, illud criterium in promtu habere, ideo illud hoc loco nude subjungam, et quidem sub forma $Y = 0$; nempe dictam sursolidam differentiando pro $dy = 0$, dein x eliminando. Sic habetur $Y = 0$ *tale:*

7) $$3125y^4 - 3750bcy^3 + [108b^5 + 2000bd^2 + 825b^2c^2 + 2250dc^2 - 900b^3d]\,y^2$$
$$+ [16b^3c^3 - 72b^4cd + 108c^5 - 630bdc^3 + 560b^2d^2c - 1600d^3c]\,y +$$
$$256d^5 - 27d^2c^4 - 4b^3c^2d^2 - 128b^2d^4 + 16b^4d^3 + 144bc^2d^3 = 0.$$

Ceterum qui materiam *praesentem* persequi vult, prudenter calculos ad simplicem $x^5 + dx - y = 0$ adaptabit, posito $b = 0$, $c = 0$.

2. Quodsi ab investigando coefficiente B, (de *hoc* enim hactenus agebatur,) suo tempore ad *reliquos* C, D, E progrederis, reperies recta rei tractatione illos penitus a *primo* B, id est a T pendere, et ad hos T valores *reduci*. Videbis nempe, quod (sepositis partibus per se symmetricis) praecise nihil nisi merae formae *cyclicae* prodeant, quales nostri T fuerant, sed cyclicae nunc *altioris* categoriae; ut nunc pulchre videbis. Ecce hic juxta invicem scriptam categoriam cyclicam primitivam T, et altiorem quamlibet M.

8) $$T' = xp + pq + qr + ru + ux.$$

9) $$M = x^m p^n + p^m q^n + q^m r^n + r^m u^n + u^m x^n.$$

Jam quum valor T′ nonnisi suam *unicam* formam prae se ferat, sic contra valor M admittit manifesto *duplicem* formam:

10) $$K' = x^m p^n + p^m q^n + q^m r^n + r^m u^n + u^m x^n.$$

11) $$K'' = x^n p^m + p^n q^m + q^n r^m + r^n u^m + u^n x^m.$$

Et sic ergo ad simplicem cyclum T pertinent semper *duo* conjugati cycli *altiores* K′, K″, quae ergo formant *quadraticam:*

12) $$K^2 - \pi K + \lambda = 0, \text{ radicum } K', K'';$$

ita ut *haec* demum censenda sit priori seu primitivo cyclo T respondere, id est functiones π et λ jam ejusdem difficultatis existunt, quâ valor T, vel quod idem est, hi π et λ, rite tractatae, ab aeque alta aequatione ac T pendebunt. Habes ergo hic praecise casum (§. 27, Nro. 22), quem quaeso respice, et quo literae K′, K″ prorsus *eundem* sensum habent, quem in praesenti casu. Nimirum si *tres* tantum radices x, p, q ponantur, tum ad simplicem earum cyclum $xp + pq + qx$, pertinebunt similli prorsus modo *duae* altiores categoriae sey cycli:

$$K' = x^m p^n + p^m q^n + q^m x^n \qquad R)$$
$$K'' = x^n p^m + p^n q^m + q^n x^m.$$

Unde oritur quadratica $K^2 - \pi K + \lambda = 0$, quae (posito $x^3 = ax + y$) habebit jam coefficientes π, λ *symmetricos*, id est qui per *a, y exhiberi* possunt. Et sic ergo singula radix K′ dabitur quidem per *a, y*, sed *irrationaliter* tantum, seu $K' = M + \sqrt{N}$. Ideo has K′, K″ casu cubico dixi *semi* — symmetricas, quia demum ad formam *quadraticam* revocatae symmetriam actualem exhibent. — Praesenti *sursolido* casu autem radices K′, K″ (Nro. 10. 11) *non* potui semi-symmetricas dicere, quia si ad quadraticam

$K^2 - \pi K + \lambda = 0$ revocantur, ambae literae eandem quidem cum fonte suo T naturam seu difficultatem sortitae sunt, sed haec T *non* est symmetrica, sed *Cyclica* tantum. Casu cubico fuit primitivus cyclus $xp + pq + qx = -a$, id est immediate per *a* dabatur. Casu sursolido autem cyclus $xp + pq + qr + ru + ux$ habet valores *duodecim*, ut vidimus. Atque haec est ergo discrepantia inter cyclum *cubicum* et cyclum *sursolidum*. Ceterum functio cyclica T, (a qua aequatio $t^5 + Bt^3 - Ct^2 + Dt - E = 0$ penitus pendere deprehenditur,) praecise et verissimo sensu dicenda est functio *Resolutoria*; siquidem ea ita comparata est, ut ad *sextum* gradum perducat, (ut vidimus,) sed qui sextus gradus ob ternarias relationes (Nro. 1 et 2) characterem Resolubilitatis adoptat. — At qui a coefficiente B ad *reliquos* C, D, E suo tempore progreditur, vel qui, (quod item est) quadraticam (Nro. 10. 11) $K^2 - \pi K + \lambda = 0$ expiscat, is reperiet praeter functionem T resolutoriam dari *alias* porro functiones resolutorias (*itidem* ab inventa semel T pendentes vel per eam dabiles), altiorum tamen dimensionum. In has altiores functiones resolutorias te in dictae quadraticae expiscatione, calculus ipse *sponte* perducet. Earum *simplicissimam* deprehendes esse:

$$Q = xpq + pqr + qru + rux + uxp.$$

Cujus legem seu progressum cyclicum repetita ordinatim lectione ultro pervidebis. Et est ea ita comparata, ut singula radix *ter* occurrat, et nulla saepius. In primitivâ resolutoriâ T singula radix occurrit *bis*. Et ad quamvis Q cernis dari *conjugatum* quasi Complementum:

$$Q'' = xqu + qup + upr + prx + rxq,$$

ita ut $Q' + Q'' = c$, prorsus ut pro T (§. 31, A). — Et videbis pro Q existere item valores praecise 12 ut pro T; redeuntes ad *sex* tamen, quae sexta habet speciales *relationes* (in modum § praesentis Nro. 1. 2). — Et jam autem necesse est, ut me ipse compescam; et excusatus ero, quod meris indigitationibus acquiescam, quas ne ipsas quidem sequens materia cogebat, suadebat autem communis et magna scientiae *utilitas*. Certe qui coefficientibus B, C, D, E exhibendis atque deinde ipsius $t^5 + Bt^3 - Ct^2 + Dt - E = 0$ resolutioni favente Minerva vacabit, is quod mihi fas et integrum non erat, *volumen* huic libro parem illis rebus complebit, et nullus dubito, quin propter has meras *directrices* regulas magnam gratiam habiturus mihi sit.

3. In hac theoria praesto occurrunt etiam egregia exempla theorematis (§. 4) memorati, (cujus demonstrationem generalem subjungere, locus non sinit.) *Pone* radices *tres* saltim x, p, q. Et $x^3 - Ax^2 + Bx - C = 0$. Habebit cyclus $B = xp + pq + qx$ suum *unicum* valorem. Ergo primus casus *quadratici* cycli est:

$$K' = x^2p + p^2q + q^2x, \quad K'' = xp^2 + pq^2 + qx^2;$$

quae hujus $K^2 - \pi K + \lambda = 0$ radices erunt. Jam exprime, (quod facile fit) literas π, λ per A, B, C. Resolutâ aequatione patet, in illa habitare partem irrationalem formae $\sqrt{[\pi\pi - 4\lambda]}$. Et quidem videbis esse:

$\pi\pi - 4\lambda = -4B^3 + A^2B^2 + 18ACB - 4A^3C - 27C^2$. Jam ergo pro *alio* quovis altiori casu fac *eadem*; verbi causa pro:

$$Q' = x^3p^2 + p^3q^2 + q^3x^2 \qquad Q'' = x^2p^3 + p^2q^3 + q^2x^3$$

forma quadraticam $Q^2 - \varepsilon Q + \vartheta = 0$, et exprime nempe literas ε et ϑ per A, B, C. Habes jam resolvendo partem irrationalem formae hujus $\sqrt{[\varepsilon\varepsilon - 4\vartheta]}$. In quo termino, si nempe literas ε, ϑ per A, B, C, ut jussi, expressisti, reperies, functionem tuam admittere factorem quadraticum MM, ita nempe ut praecise fiat:

$$\sqrt{[\varepsilon\varepsilon - 4\vartheta]} = M\sqrt{[\pi\pi - 4\lambda]}.$$

Similiter pro quovis alio casu $Q = x^m p^n + p^m q^n + q^m x^n$; vel pro quatuor et pluribus radicibus x, p, q, r ... ubi libeat. Talia experieris, ubi opportuno tempore vacarit. — Vel etiam si quadraticas

dictas ad *Minimi* statum accommodes, (differentiando nempe, et eliminando dein K, et similiter pro Q), habebis respective $\pi\pi - 4\lambda = 0$ et $\varrho\varrho - 4\vartheta = 0$, et deprehendes esse $\varrho\varrho - 4\vartheta = MM[\pi\pi - 4\lambda]$, ut dixi.

4. Non possum sub finem, quin functionum cyclicarum resolutoriarum, quas hactenus dixi, egregiam et fundamentalem proprietatem breviter saltim *commemorem*. Simplicissima earum functionum est, ut vidimus, *haec*:

13) $$T = xp + pq + qr + ru + ux.$$

Haec differentietur, more pristino (§. 14), donec mera differentialia restent. Habebitur:

14) $$d^2T = 2(dxdp + dpdq + dqdr + drdu + dudx).$$

Jam vero cum in superioribus obtinuerimus positiones $dp = \alpha dx$, $dq = \alpha^2 dx$, $dr = \alpha^3 dx$, $du = \alpha^4 dx$, (ubi autem viginti quatuor *permutationes* inter $\alpha \ldots \alpha^4$ locum habent,) tum pro (14) fiet:

$$1 + \alpha + \alpha^2 + \alpha^3 + \alpha^4 = 0. \quad [\text{Ergo } d^2T = 0.]$$

Nempe lex illa radicum *unitatis*. Et similiter jam pro *quavis* omnium $T' \ldots T^{XII}$, dummodo singulis adhibeas competentem casum *permutationum*, quas subinde dixi. — At haec proprietas locum habet in *omnibus* functionibus cyclico resolutoriis. Proxime sequitur, ut supra vidimus, functio:

$$Q = xpq + pqr + qru + rux + uxp. \quad \text{Fiet:}$$

$$d^3Q = 6[dxdpdq + dpdqdr + dqdrdu + drdudx + dudxdp].$$

Pone ut supra (nam iste permutationum ordo praecise in praesentem etiam casum competit,) $dp = \alpha dx$ et porro; habebis denuo:

$$1 + \alpha + \alpha^2 + \alpha^3 + \alpha^4 = 0. \quad (\text{Ergo } d^3Q = 0).$$

Et hanc *eandem* proprietatem in omnibus *aliis* etiam cyclicis functionibus, in quas (ut dixi,) continuata hac theoria ultro offendes, deprehendes. In omnibus *non*-cyclicis autem eandem deprehendes *nunquam*. — At vero jam terminus his figendus est, et progredimur tandem ad ea, in quorum gratiam hic liber conscriptus est. Ergo lectorem omnino nunc expergefieri fas est.

Pars Tertia.

§. 33.

Aequatio algebraica ut $x^5 * + bx^3 - cx^2 + dx - y = 0$, dicitur *universalis*, si pro radice x inveniendo, determinatio *nulla* existit praeter istas fundamentales $x + \ldots = 0$, $xp + \ldots = b$, et porro. Atque aequationi tali igitur omnis ea *difficultas* inhaeret, quae gradui suo *competit*. — At si *praeter* has fundamentales detur aliqua *alia* radicum relatio, a fundamentalibus *non* pendens, vel una vel plures, tum data aequatio jam *specialis* erit, et *non* omnis difficultas, gradui suo alias inhaerens, in eam cadet. Aequatio enim fit *plus* quam determinata, siquidem ad fundamentales et numero sufficientes accedat illa aliqua *nova* relatio. — Ejusmodi relatio extraordinarie ad fundamentales accedens, relatio *Auxiliaris* dici potest. Et proponam nunc eam auxiliarem, quae in hoc negotio sola et *unica* in considerationem venit, nempe:

1) $$x + \alpha p + \alpha^2 q + \alpha^3 r + \alpha^4 u = 0. \quad (\S.\ 29,\ \text{Nro. } 2).$$

Jam ergo ponamus, datae sursolidae $x^5 + bx^3 - cx^2 + dx - y = 0$ inhaerere hanc (1) *auxiliarem*. Hujus ope resolutio aequationis datae utique *facilitabitur* gradu quodam N', ut ita dicam, *anonymo*. Nam prorsus non opus est, ut sciamus, quae *sit* praecise illa facilitatio; et satis est concedi, quod

sursolida data resolubilior sit cum ista auxiliari, quam *sine* illa. Ideo facilitationis gradum N' dixi *anonymum*. Ceterum infra videbimus, gradum hunc N' in *Eo* praecise consistere, ut sursolida data dependeat a resolvente *Cubica* tantum, non *Biquadratica*. —

Sequitur jam casus *secundus*. Radices ex unitate sursolidae sint $\alpha, \beta, \gamma, \delta$. Et ad sursolidam datam ponantur *duae* auxiliares:

2) $x + \alpha p + \alpha^2 q + \alpha^3 r + \alpha^4 u = 0.$

3) $x + \beta p + \beta^2 q + \beta^3 r + \beta^4 u = 0.$

Harum ope sursolida jam ad majorem porro seu *secundam* facilitatis gradum N'' reducitur; quem gradum *ideo* non dico anonymum, quod ex ipso operationum processu palam fiet, in quo facilitatio consistat. Consultum est ..., non utramque α et β literam retinere; et pendebit jam ergo a lubitu nostro, quamnam radicem aliam sub β designari velimus. Ponatur ergo verbi causa $\beta = \alpha^4$. Hac semel electione facta, res igitur nobis erit cum his expressis auxiliaribus:

4) $x + \alpha p + \alpha^2 q + \alpha^3 r + \alpha^4 u = 0.$

5) $x + \alpha^4 p + \alpha^3 q + \alpha^2 r + \alpha u = 0.$

Et jam ergo sequitur aliquid *calculorum* (at quam non poenitendorum!) qui tamen intra horae spatium omnes transigi possunt. Modo fac coeco obsequio, quae impero; siquidem omnem, quam fas erat, concinnitatem adhibui. — Et similis operatio etiam supra pro casu *anonymo* locum habuisset, sed vicies majori calculo; unde et lectori et mihi peperci. Et causa patet ergo, cur illum casum interim seposuerim vel quasi. — Jam ergo si detur $x^5 + bx^3 - cx^2 + dx - y = 0$ denturque (4.5), investigandum est, quales inter b, c, d *relationes* ex positis (4.5) emergant vel consequantur. Ad hunc finem concurrere debent fundamentales *tres*:

6) $x + \ldots = 0.$ 7) $xp + \ldots = b.$ 8) $xpq + \ldots = c.$

[Casu anonymo concurrere debuisset porro *quarta* fundamentalis $xpqr + \ldots = d$; unde terribilis illa, quam dixi, calculorum strages oriunda fuisset.] — Cum his (4—8) jam res erit. Primo ex (6) impone valorem u in omnes *reliquas*. Ita aequationes ad *quatuor* numero revocantur; quae erunt:

9) $(1-\alpha^4)x + (\alpha-\alpha^4)p + (\alpha^2-\alpha^4)q + (\alpha^3-\alpha^4)r = 0.$

10) $(1-\alpha)x + (\alpha^4-\alpha)p + (\alpha^3-\alpha)q + (\alpha^2-\alpha)r = 0.$

11) $x^2 + p^2 + q^2 + r^2 + xp + xq + xr + pq + pr + qr + b = 0.$

12) $x^2p + x^2q + x^2r + p^2x + p^2q + p^2r + q^2x + q^2p + q^2r + r^2x + r^2p + r^2q$
$+ 2xpq + 2xpr + 2xqr + 2pqr + c = 0.$ Pro (9.10) sit breviter:

M.) $Ax + Bp + Cq + Dr = 0$
$Ex + Fp + Gq + Hr = 0.$ Ex his (M) ejecto r fit:

13) $[AH - DE]x + [BH - DF]p + [CH - DG]q = 0.$

Reperies esse $AH - DE = CH - DG$; ergo breviter pone:

$$Px + Qp + Pq = 0, \text{ vel } x + q = -\frac{Qp}{P}.$$ Id est:

14) $x + q = [\alpha^2 + \alpha^3]p.$ Breviter $x + q = Mp.$

Videbitur tibi valor $x + q$ sub forma *fracta*. Sed repeto hic regulam supra datam circa naturam functionum α. Nimirum si tibi *alia* forma, praesertim *fracta* prodierit, pone tuum valorem subinde *meo* aequalem, et jam constabit identitas. Uti enim soleo in his peculiari transformationum artificio, quod brevitatis causa omitto. — Jam vero ex $Ax + Bp + Cq + Dr = 0$ valor r introducendus est etiam in istas (11.12), unde fiet:

15) $[A^2 - AD + D^2]x^2 + [B^2 - BD + D^2]p^2 + [C^2 - CD + D^2]q^2 + D^2b +$
$[2AB + D(D - A - B)]xp + [2AC + D(D - A - C)]xq + [2BC + D(D - B - C)]pq = 0.$

16) $[A^2\text{-}AD]x^3+[B^2\text{-}BD]p^3+[C^2\text{-}CD]q^3+2[AB+AC+BC+DD\text{-}AD\text{-}BD\text{-}CD]xpq+$
$[A^2+D^2+2AB\text{-}2AD\text{-}BD]x^2p+[B^2+D^2+2AB\text{-}2BD\text{-}AD]p^2x+[C^2+D^2+2AC\text{-}2CD\text{-}AD]q^2x+$
$[A^2+D^2+2AC\text{-}2AD\text{-}CD]x^2q+[B^2+D^2+2BC\text{-}2BD\text{-}CD]p^2q+[C^2+D^2+2BC\text{-}2CD\text{-}BD]q^2p+D^3c=0.$

Calculus hic non injucundus est. Pro (15. 16) scribe:

17) $\mathfrak{A}x^2+\mathfrak{B}p^2+\mathfrak{C}q^2+\mathfrak{D}xp+\mathfrak{E}xq+\mathfrak{F}pq+D^2b=0.$

18) $\mathfrak{G}x^3+\mathfrak{H}p^3+\mathfrak{J}q^3+\mathfrak{K}xpq+\mathfrak{L}x^2p+\mathfrak{M}p^2x+\mathfrak{N}q^2x+\mathfrak{O}x^2q+\mathfrak{P}p^2q+\mathfrak{Q}q^2p+D^3c=0.$

Et jam res ad aequationes *tres* reducta est, ad (17. 18) et $x+q=Mp$. — Nunc autem valores $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ ... *actuales* quaeri debent, ut posthac in promtu sint. Hunc in finem in istis (15. 16) seorsim in charta quaere omnes A^2, B^2 ... et omnia item *producta* AB, AD ...; (alias eandem rem *multoties* computare deberes.) Sic dein veros pro (15. 16) valores promte ex dictis comparabis vel conflabis. Et prodibit:

19) $\mathfrak{A}=1+\alpha-\alpha^2-\alpha^4,$ $\mathfrak{B}=-1+\alpha+\alpha^3-\alpha^4,$ $\mathfrak{C}=-1+2\alpha-\alpha^2+\alpha^3+\alpha^4.$
$\mathfrak{D}=-1+3\alpha-2\alpha^4,$ $\mathfrak{E}=-1+2\alpha^2-\alpha^4,$ $\mathfrak{F}=-2+3\alpha^3-\alpha^4.$

20) $\mathfrak{G}=1+\alpha^2-\alpha^3-\alpha^4,$ $\mathfrak{H}=-1+2\alpha^2-\alpha^4,$ $\mathfrak{J}=-1-\alpha+\alpha^2+\alpha^4.$
$\mathfrak{K}=-6+2\alpha^2-6\alpha^4,$ $\mathfrak{L}=3\alpha+\alpha^2-\alpha^3-3\alpha^4,$ $\mathfrak{M}=-2+3\alpha+2\alpha^2-3\alpha^4.$
$\mathfrak{N}=-2-\alpha+3\alpha^2,$ $\mathfrak{O}=3\alpha^2-\alpha^3-2\alpha^4,$ $\mathfrak{P}=-3+2\alpha^2+3\alpha^3-2\alpha^4.$
$\mathfrak{Q}=-3-\alpha+\alpha^2+3\alpha^3.$

His praevie determinatis jam, superest ut ex lineari:

21) $Mp=x+q$

valor p in istas (17. 18) introducatur; quo facto res ad finem perducta est. Jucunde prodit:

22) $[\mathfrak{A}M^2+\mathfrak{D}M+\mathfrak{B}]x^2+[\mathfrak{C}M^2+\mathfrak{F}M+\mathfrak{B}]q^2+[\mathfrak{E}M^2+\mathfrak{D}M+\mathfrak{F}M+2\mathfrak{B}]xq+M^2D^2b=0.$

23) $[\mathfrak{G}M^3+\mathfrak{L}M^2+\mathfrak{M}M+\mathfrak{H}]x^3+[\mathfrak{O}M^3+\mathfrak{K}M^2+\mathfrak{L}M^2+2\mathfrak{M}M+\mathfrak{P}M+3\mathfrak{H}]x^2q$
$+[\mathfrak{N}M^3+\mathfrak{K}M^2+\mathfrak{Q}M^2+2\mathfrak{P}M+\mathfrak{M}M+3\mathfrak{H}]xq^2+[\mathfrak{J}M^3+\mathfrak{Q}M^2+\mathfrak{P}M+\mathfrak{H}]q^3+M^3D^3c=0.$

Vel: 24) $\mathfrak{M}'x^2+\mathfrak{M}''q^2+\mathfrak{M}'''xq+M^2D^2b=0.$

25) $\mathfrak{N}'x^3+\mathfrak{N}''x^2q+\mathfrak{N}'''xq^2+\mathfrak{N}^{IV}q^3+M^3D^3c=0.$ Respective.

Et jam stadium feliciter decursum est. Cum enim sit $M=\alpha^2+\alpha^3$, ideo pro (22) habes:

26) $\mathfrak{M}'=-5\alpha^2,\ \mathfrak{M}''=-5\alpha^2,\ \mathfrak{M}'''=5(\alpha+\alpha^3).$
$M^2D^2=[1-\alpha\alpha]^2.$ Sic ergo pro (24) habebis:

27) $x^2+q^2+\frac{\alpha^3qx}{1+\alpha}=\frac{\alpha b}{[1-\alpha]^2}$

[Si tua aequatio non subinde consentit, eam cum nostra identificabis, et consentiet.] — Pro *altera* autem aequatione (25) habebis:

28) $\mathfrak{N}'=0,\ \mathfrak{N}''=0,\ \mathfrak{N}'''=0,\ \mathfrak{N}^{IV}=0,$ id est: 29) $c=0.$

Ergo aequatio $x^5+bx^3-cx^2+dx-y=0$, quae duas (4. 5) auxiliares habet, coefficientem hunc e *deficientem* necessario habet, et nempe est formae $x^5+bx^3+dx-y=0$. Et similiter nunc etiam *altera* coefficientium relatio ultro habetur. Divide enim nostram $x^5+bx^3+dx-y=0$ per $x-q$, habebitur:

30) $x^4+qx^3+[b+q^2]x^2+[bq+q^3]x+q^4+bq^2+d=0.$

Jam loco istius (27) scribe breviter: $x^2+q^2+Mqx-Nb=0$ (S.). Ergo:

31) $M=\frac{\alpha^3}{1+\alpha}$, $N=\frac{\alpha}{(1-\alpha)^2}$. (Superior enim literae M significatio jam obsoluit.) —

Dividendo ergo istam (30) per (S), remanebit residuum per se $=0$; et quidem praecise:

32) $[M(1+M-M^2)q^3+(1+N-M-2MN)bq]x+$
$(1+M-M^2)q^4-(1+M-M^2)Nbq^2+(N+N^2)bb+d=0.$

Repositis jam pro M, N suis valoribus (31), pulcherrimo successu videbis omnes q et x *evanescere*, siquidem $1+M-M^2=0$ et $1+N-M-2MN=0$; et restabit jam sola relatio quam quaerimus:

33) $[N + N'] bb + d = o$. Vel: 34) $bb = \frac{[\alpha - x]^{[illegible]}}{[aa + [illegible]]^{2}}$.

Jam dices forsan, te ex his duabus relationibus (29 et 34) *nondum* tamen in datae sursolidae naturam nedum in ejus resolutionem introspicere. At vero egregie sane falleris. Quum enim istam (34) per meum, quod commemoravi, artificium reducere conarer, subinde vidi esse:

35) $$bb = 5d.$$

[Identificando (34) et (35), constabit assertum.] Et sic ergo scimus, aequationem sursolidam, quae duas auxiliares (4.5) possidet, ita esse comparatam:

$$x^5 + bx^3 + \frac{bb}{5} x - y = o. \text{ Positoque } b = -5a \text{ fit:}$$

36) $$x^5 - 5ax^3 + 5a^2x - y = o.$$

Quae jam posito $x = z + \frac{a}{z}$ *resolvitur*. Fiet nimirum $z^{10} - yz^5 + a^5 = o$. Et sic ergo duo auxiliares perducunt subinde ad *Resolutionem* sursolidae, et facilitatis gradus N'', de quo hactenus sermo fuit, in eo consistit, ut aequatio in formam *Moivraeam* habeat. Nam nostra (36) est ipsissima forma *Moivri!* —

§. 34.

Et sic jam pronum est suspicari, quid futurum sit, si sursolida auxiliares imo *tres* adjunctas habet. Quemadmodum (§. 33, Nro. 2 et 3) *duo* systemata auxiliarium cernuntur, sic jam scribe *tria*, secundum α, β, γ expressa. Vel ut brevi rem absolvas, pone $\beta = \alpha^2$, $\gamma = \alpha^3$, sic habebunt hae auxiliares formam:

1) $$x + \alpha p + \alpha^2 q + \alpha^3 r + \alpha^4 u = o.$$
$$x + \alpha^2 p + \alpha^4 q + \alpha r + \alpha^3 u = o.$$
$$x + \alpha^3 p + \alpha q + \alpha^4 r + \alpha^2 u = o.$$

Ex his et fundamentali $x + p + \ldots = o$, ejicies *tres* radices, restabit aequatio inter *duas* igitur. Reperies nempe:

2) $$p = \alpha x,\ q = \alpha^2 x,\ r = \alpha^3 x,\ u = \alpha^4 x.$$

Sed non opus est, ut hac taediosa eliminatione te fatiges; et satis erit, rem tibi a *posteriori* confirmare. Pone nempe valores (2) in istas tres (1), et videbis eas omnes debite *evanescere*. Et sic ergo pro casu hoc radices hanc formam habent: $x, \alpha x, \alpha^2 x, \alpha^3 x, \alpha^4 x$. Id est aequatio data, tres auxiliares habens, est *bimembris*, formae $x^5 - y = o$.

§. 35.

Jam ergo ad *universalem* $x^5 + bx^3 - cx^2 + dx - y = o$ revertor, quae nempe *nullam* praeter suas fundamentales determinationem habet. Et solum et *unicum* problema superest, aequationem universalem transformare in aequationem *bimembrem*. Transformanda erit huic scopo in secundariam, cui *una* auxiliaris insit, secundaria in tertiam, cui *duo* auxiliares insint, tertia in quartam, cui *tres* auxiliares insint. Quae tertia jam *bimembris* erit. Negotium hoc omne jam ope *Cabbalae* transigitur; in qua auxiliaris toties dicta penitus habitat, et sunt hae auxiliares mera *soboles* cabbalae. Transformationes enim subinde indigitatas, jam *supra* inchoavimus; nam transformavimus (§. 29) universalem in *secundariam*:

1) $$t^5 + Bt^3 - Ct^2 + Dt - E = o,$$

quae jam auxiliari *una* (ibid. Nro. 2) praedita fuit, ut vidimus. Et proposito ergo problemate, quo data universalis jubetur in specialem transformari, quae unam istam *auxiliarem* possideat, satisfacies jam per meram quasi *empiricam* regulam, a me semel ex cabbala erutam, et respondebis, quod assumi debeat substitutio in cyclum rediens $t' = x - \alpha p$, $t'' = p - \alpha q$, $t''' = q - \alpha r$, et porro, ut oriatur nova aequatio (1), quae jam auxiliarem dictam *possessura* sit. Nam supra demonstravimus, (et quo-

vis unico exemplo patet,) positiones quascunque cyclicas $t' = x - \alpha p$, et cetera, si x, p, q, r eliminentur, relinquere istam *auxiliarem*, ex qua nempe radix quinta u *sponte* semper excidit. — At vero nos studia nostra non ad secundariam neque ad tertiam dirigemus, sed his ambabus quasi transiliendis immediate reductionem aequationis universalis ad *bimembrem* seu ad eam intendimus, quae *tribus* auxiliaribus pollet. — Et ut clarum tibi conceptum in materia tam nova formare possis, rem ita enunciare lubet. — Proposita universali $x^5 + bx^3 - cx^2 + dx - y = 0$ quaeritur functio $V = F(x, p, q, r, u)$, qua mediante oriatur bimembris $V^5 - \Pi = 0$. Atque hanc functionem F jam ope cabbalae *mechanice* quasi seu *empirice* in potestatem tuam rediges. Quoniam autem positionum cyclicarum, ut olim vidimus, *multae* in cabbala praesto sint, pro operationum decursu unam pro lubitu *primam adoptabis*, et ita rem transiges. Dein inventâ semel formulâ, quam dixi empiricâ, reliquos casus compossibiles sponte ex mera radicum $x, p \ldots$ permutatione habebis ante oculos. Et sic ergo jam totum operationum tenorem accipe.

§. 36.

Data universali aequatione sursolida:

1) $$x^5 + bx^3 - cx^2 + dx - y = 0,$$

assumatur unus pro lubitu transformationis cyclus cabbalisticus:

2) $$\begin{aligned} t' &= x - \alpha u \\ t'' &= u - \alpha r \\ t''' &= r - \alpha q \\ t^{IV} &= q - \alpha p \\ t^{V} &= p - \alpha x. \end{aligned}$$ Ex hoc cyclo formabitur:

3) $$t^5 + Bt^3 - Ct^2 + Dt - E = 0,$$

quae *unam* habebit *auxiliarem*, et quidem [ejecto ex istis (2) x, p, q, r] praecise *hanc*:

4) $$t' + \alpha t'' + \alpha^2 t''' + \alpha^3 t^{IV} + \alpha^4 t^{V} = 0.$$

Hanc (3) secundariam, (cujus coefficientes $B, C \ldots$ nihil curamus) transformamus jam in *tertiam* reductam:

5) $$w^5 + Mw^3 - Nw^2 + Pw - Q = 0,$$

et adoptemus huic scopo hunc novum cabbalae cyclum:

6) $$\begin{aligned} w' &= -\alpha t' + t'' \\ w'' &= -\alpha t'' + t''' \\ w''' &= -\alpha t''' + t^{IV} \\ w^{IV} &= -\alpha t^{IV} + t^{V} \\ w^{V} &= -\alpha t^{V} + t', \end{aligned}$$

ex quibus nempe praecedens (5) formabitur. Ex his (6) jam ejecto t', t'', t''', t^{IV}, (et multiplicando per $\alpha\alpha$) habebitur competens casui huic auxiliaris domestica:

7) $$\alpha^4 w' + \alpha^3 w'' + \alpha^2 w''' + \alpha w^{IV} + w^{V} = 0.$$

Privatam seu domesticam hanc dico. Sed cum *secundaria* (3) jam auxiliarem unam (4) habuerit, ideo tertia nostra (5) habebit seu nanciscetur jam auxiliares *duas*; ut jam videbis. Et huic (7) exhibebo nempe auxiliarem *conjugatam*. In istis (6) multiplica secundam per α, tertiam per α^2, quartam per α^3, quintam per α^4, deinde omnes adde; sic pars ad dextram posita fiet:

$$[\alpha^5 - 1]\{\alpha t' + \alpha^2 t'' + \alpha^3 t''' + \alpha^4 t^{IV} + t^{V}\}.$$

Haec si per α^4 ducatur, consentiet jam cum auxiliari (Nro. 4), estque ergo $= 0$. Sic (6) remanebit:

8) $$w' + \alpha w'' + \alpha^2 w''' + \alpha^3 w^{IV} + \alpha^4 w^{V} = 0.$$

Quae est jam istius (7) conjugata. Ceterum pro ista (7) scribere possemus $w' + \delta w'' + \delta^2 w''' +$

$\delta^3 w^{IV} + \delta^4 w^V = 0$. Nam posito $\delta = \alpha^4$ ista (7) ante oculos redit. Et sic ergo mediante cabbala cyclo universalis (1) reducta est ad secundariam (3), cui *una* auxiliaris est, et secundaria reducta est ad tertiam (5), cui *duo* auxiliares praesto sunt; id est ad casum *Moivri*. — Restat casus ultimus. Nempe data est (5) cum *duabus* auxiliaribus:

$$w' + \alpha w'' + \alpha^2 w''' + \alpha^3 w^{IV} + \alpha^4 w^V = 0$$
$$w' + \delta w'' + \delta^2 w''' + \delta^3 w^{IV} + \delta^4 w^V = 0.$$

et oporteat eam reduci ad aliam, quae *tres* habeat, (et quam vidimus *bimembrem* fore.) — Breviter, ista (5) reducenda est ad formam:

9) $$V^5 - \Pi = 0,$$

mediante *cabbala*. Sume varia causa cyclum:

10) $$V' = -\alpha w' + w'''$$
$$V'' = -\alpha w''' + w^V$$
$$V''' = -\alpha w^V + w''$$
$$V^{IV} = -\alpha w'' + w^{IV}$$
$$V^V = -\alpha w^{IV} + w'.$$

Ejectis (10) w', w'', w''', w^{IV}, prodit auxiliaris:

11) $$V' + \alpha^4 V'' + \alpha^3 V''' + \alpha^2 V^{IV} + \alpha V^V = 0;$$

quae quasi domestica est. — In (10) duc secundam per α^2, tertiam per α^4, quartam per α, quintam per α^3. Deinde omnes quinque adde. Prodibit pars ad dextram haec:

$$[\alpha^5 - 1][\alpha w' + \alpha^2 w'' + \alpha^3 w''' + \alpha^4 w^{IV} + w^V].$$

Haec per α^4 ducta, sistit nostram (7), est ergo $= 0$. Sic remanebit (10) haec:

12) $$V' + \alpha^2 V'' + \alpha^4 V''' + \alpha V^{IV} + \alpha^3 V^V = 0$$

quae ordinationi $\beta, \beta^2, \beta^3, \beta^4$ respondet; si ponas $\beta = \alpha^2$. Denique in istis (10) multiplica secundam per α^3, tertiam per α, quartam per α^4, quintam per α^2, et jam omnes adde! Sic ad dextram habebis:

$$[\alpha^5 - 1][\alpha w' + w'' + \alpha^4 w''' + \alpha^3 w^{IV} + \alpha^2 w^V]$$

quae per α^4 ducta consentit cum ista (7) ideoque est $= 0$, et remanebit pro (10) *haec*:

13) $$V' + \alpha^3 V'' + \alpha V''' + \alpha^4 V^{IV} + \alpha^2 V^V = 0.$$

Et sic ergo vi cyclorum a nobis electorum, reducta est Moivraea ad bimembrem praecise *his* praeditam auxiliaribus tribus:

$$V' + \beta V'' + \beta^2 V''' + \beta^3 V^{IV} + \beta^4 V^V = 0.$$
$$V' + \gamma V'' + \gamma^2 V''' + \gamma^3 V^{IV} + \gamma^4 V^V = 0.$$
$$V' + \delta V'' + \delta^2 V''' + \delta^3 V^{IV} + \delta^4 V^V = 0.$$

(Nempe si ponis $\beta = \alpha^2$, $\gamma = \alpha^3$, $\delta = \alpha^4$, habebis istas (12.13.11) respective.) —

§. 37.

Et jam in eo sumus, ut functionem linearem, qua mediante aequatio sursolida ad bimembrem formam revocatur, lectori ob oculos ponam. Nempe cum sit $V^5 - \Pi = 0$ quaesita bimembris, ideo (§. 36, Nro. 10) ad ipsas radices x, p ... jam redeundum est. Id est, ibi (Nro. 10) pro w'..... pone valores suos (Nro. 8), unde fiet:

1) $$V' = -\alpha[t'' - \alpha t'] + t^{IV} - \alpha t'''$$
$$V'' = -\alpha[t^{IV} - \alpha t'''] + t' - \alpha t^V$$
$$V''' = -\alpha[t' - \alpha t^V] + t''' - \alpha t''$$
$$V^{IV} = -\alpha[t''' - \alpha t''] + t^V - \alpha t^{IV}$$
$$V^V = -\alpha[t^V - \alpha t^{IV}] + t'' - \alpha t'.$$

Et in his tandem ex (§. 36, Nro. 2) reponendo valores pro $t' \ldots$, habetur linearis functio, tantopere Lagrangio expetita:

2)
$$V' = (1 + \alpha^4) q - \alpha p + \alpha^2 x - (\alpha + \alpha^3) u + (\alpha^2 - \alpha) r.$$
$$V'' = (1 + \alpha^4) x - \alpha u + \alpha^2 r - (\alpha + \alpha^3) q + (\alpha^2 - \alpha) p.$$
$$V''' = (1 + \alpha^4) r - \alpha q + \alpha^2 p - (\alpha + \alpha^3) x + (\alpha^2 - \alpha) u.$$
$$V^{IV} = (1 + \alpha^4) p - \alpha x + \alpha^2 u - (\alpha + \alpha^3) r + (\alpha^2 - \alpha) q.$$
$$V^{V} = (1 + \alpha^4) u - \alpha r + \alpha^2 q - (\alpha + \alpha^3) p + (\alpha^2 - \alpha) x.$$

Et sic ergo functio, qua $x^5 + bx^3 - cx^2 + dx - y = 0$ ad bimembrem $V^5 - \Pi = 0$ revocatur, omnino *linearis* est. Et composita mente exspectandum jam est, quid usque fiat, et quomodo calculi natura ex hoc negotio se expediat. — Functio (2) jam permutationes radicum x, p, q, r, u admittit 120, ideoque absolute non aliter nisi post has 120 radices V ad symmetriam literarum $x, p \ldots$ deducimus. Et sic existit ergo pro V aequatio 120 *mi* gradus, cujus aequationis coefficientes jam ob symmetriam radicum $x, p \ldots$ per b, c, d, y exhibebuntur. Quoniam autem in hoc negotio electiones cyclicas pro *lubitu* fecerimus, et electiones tales existant *multae*, (§. 30) ideo has electiones vel potius illarum resultationem *uno* nunc actu consequimur, in (2) nempe radicum $x, p \ldots$ *permutatione* instituta, quae erit numero 120, ut dixi. — Quia autem cyclicarum permutationum, ut supra vidimus, absolutissime loquendo non plures quam 24 sunt, ideo numerus radicum V realiter item ab 120 ad 24 redibit. Hunc in finem ex istis (2) verbi causa u ejiciatur ope hujus $x + p + \ldots = 0$. Sic fiet:

3)
$$V^{V} = (\alpha^3 + \alpha^4) r - q + \alpha^4 p - (1 + \alpha) x$$
$$V^{IV} = \alpha [(\alpha^3 + \alpha^4) r - q + \alpha^4 p - (1 + \alpha) x]$$
$$V''' = \alpha^2 [(\alpha^3 + \alpha^4) r - q + \alpha^4 p - (1 + \alpha) x]$$
$$V'' = \alpha^3 [(\alpha^3 + \alpha^4) r - q + \alpha^4 p - (1 + \alpha) x]$$
$$V' = \alpha^4 [(\alpha^3 + \alpha^4) r - q + \alpha^4 p - (1 + \alpha) x].$$

Id est: $V^{IV} = \alpha V^{V}$, $V''' = \alpha^2 V^{V}$, $V'' = \alpha^3 V^{V}$, $V' = \alpha^4 V^{V}$.

Quod ipsa jam forma aequationis $V^5 - \Pi = 0$ fiere oportere indigitat. Sed nec tamen haec proprietas ex istis (2) prius elucet, nisi radice una u *eliminata*. Id quod indigitat, quam congrua naturae calculi sit haec radicis unius proscriptio. Hinc fit, ut omnis haec theoria decurrat porro per solas x, p, q, r nempe *residuas* quatuor. Immo si (per dictas regulas §. 25), suo tempore symmetricas radicum x, p, q, r functiones iterum per *quintam* radicem u exprimimus, tum haec quinta sponte semper ex calculo rursum *emigrat*. — Ex dictis ergo jam habemus pro V aequationem totalem gradus 120 *mi*, ex factoribus formae $V^5 - \Pi = 0$ conflatam; quae ergo exponentes 5, 10, 15 … 120 retinet, ideoque proprie est gradus 24 *mi*. Et hi 24 pro Π valores, quorum typus esto:

4)
$$V^5 - [(\alpha^3 + \alpha^4) r - q + \alpha^4 p - (1 + \alpha) x]^5 = 0, \text{ vel } V^5 - L^5 = 0,$$

obtinentur, inter has radices quatuor x, p, q, r permutationibus omnibus factis; quae sunt 24, ut patet. Et hi ergo sunt isti 24 valores, qui literae L competunt. Quos literae L valores in posterum per $L' \ldots L^{XXIV}$ exhibebo. Et primo necesse est, eos omnes ante *oculos* ponere, deinde naturae molimina, hos 24 valores reducendi et sursolidam ergo resolvendi, pariter ad oculos demonstrabo.

§. 38.

Posito brevitatis causa $1 + \alpha = M$, (quam substitutionem quaeso memoriae imprime,) habentur pro L hi 24 valores:

1) $L' = \alpha^5Mr - q + \alpha^4p - Mx.$

$L'' = \alpha^5Mr - q + \alpha^4x - Mp.$

$L''' = \alpha^5Mr - p + \alpha^4x - Mq.$

$L^{IV} = \alpha^5Mr - p + \alpha^4q - Mx.$

$L^{V} = \alpha^5Mr - x + \alpha^4p - Mq.$

$L^{VI} = \alpha^5Mr - x + \alpha^4q - Mp.$

$L^{VII} = \alpha^5Mq - x + \alpha^4p - Mr.$

$L^{VIII} = \alpha^5Mq - x + \alpha^4r - Mp.$

$L^{IX} = \alpha^5Mq - p + \alpha^4x - Mr.$

$L^{X} = \alpha^5Mq - p + \alpha^4r - Mx.$

$L^{XI} = \alpha^5Mq - r + \alpha^4x - Mp.$

$L^{XII} = \alpha^5Mq - r + \alpha^4p - Mx.$

$L^{XIII} = \alpha^5Mp - q + \alpha^4x - Mr.$

$L^{XIV} = \alpha^5Mp - q + \alpha^4r - Mx.$

$L^{XV} = \alpha^5Mp - r + \alpha^4x - Mq.$

$L^{XVI} = \alpha^5Mp - r + \alpha^4q - Mx.$

$L^{XVII} = \alpha^5Mp - x + \alpha^4r - Mq.$

$L^{XVIII} = \alpha^5Mp - x + \alpha^4q - Mr.$

$L^{XIX} = \alpha^5Mx - p + \alpha^4q - Mr.$

$L^{XX} = \alpha^5Mx - p + \alpha^4r - Mq.$

$L^{XXI} = \alpha^5Mx - q + \alpha^4r - Mp.$

$L^{XXII} = \alpha^5Mx - q + \alpha^4p - Mr.$

$L^{XXIII} = \alpha^5Mx - r + \alpha^4q - Mp.$

$L^{XXIV} = \alpha^5Mx - r + \alpha^4p - Mq.$

Quarum Decisivam naturam his accipe:

2)
$$L' + L^{XI} = [\alpha^5M - 1][q + r] + [\alpha^4 - M][x + p]$$
$$L^{XVII} + L^{XIX} = [\alpha^5M - 1][x + p] + [\alpha^4 - M][q + r].$$
$$L''' + L^{XVI} = [\alpha^5M - 1][p + r] + [\alpha^4 - M][x + q].$$
$$L^{VII} + L^{XXI} = [\alpha^5M - 1][x + q] + [\alpha^4 - M][p + r].$$
$$L^{VI} + L^{XXIV} = [\alpha^5M - 1][x + r] + [\alpha^4 - M][p + q].$$
$$L^{X} + L^{XIII} = [\alpha^5M - 1][p + q] + [\alpha^4 - M][x + r].$$

3)
$$L'' + L^{XII} = [\alpha^5M - 1][q + r] + [\alpha^4 - M][x + p].$$
$$L^{XVIII} + L^{XX} = [\alpha^5M - 1][x + p] + [\alpha^4 - M][q + r].$$
$$L^{IV} + L^{XV} = [\alpha^5M - 1][p + r] + [\alpha^4 - M][x + q].$$
$$L^{VIII} + L^{XXII} = [\alpha^5M - 1][x + q] + [\alpha^4 - M][p + r].$$
$$L^{V} + L^{XXIII} = [\alpha^5M - 1][x + r] + [\alpha^4 - M][p + q].$$
$$L^{IX} + L^{XIV} = [\alpha^5M - 1][p + q] + [\alpha^4 - M][x + r.]$$

Ecce hic ergo (2.3) molimina et operationes, quibus dixi naturam uti ad casum sursolidum debellandum. His duabus (2.3) tabulis nempe principium et *entelechia* quasi resolutoria continetur. Primo cernis in his formulis regnare quandam *Dualismi*, ut ita dicam, speciem, qui nunc per omnem reliquum theoriae hujus decursum perpetuo quasi interludet. Et patet jam, cur calculi natura radicem unam seu quintam ex formulis *proscriptam* voluerit. Sic enim residuae x, p, q, r in modum *binomii* possunt ordinari, et formam induunt:

$$L' + L^{XI} = A(q + r) + B(x + p).$$

ubi A, B sunt numerici. Similiter et ad *sinistram* hic idem dualismus conspicuus est, siquidem radices L item in *paria* seu *binas* distinguuntur. — Porro autem ex his (2.3) *relationem* etiam harum L radicum ante oculos habes. Obtutus enim docet esse:

4)
$$L' + L^{XI} = L'' + L^{XII}, \qquad L^{XVII} + L^{XIX} = L^{XVIII} + L^{XX}.$$
$$L''' + L^{XVI} = L^{IV} + L^{XV}, \qquad L^{VII} + L^{XXI} = L^{VIII} + L^{XXII}.$$
$$L^{VI} + L^{XXIV} = L^{V} + L^{XXIII}, \qquad L^{X} + L^{XIII} = L^{IX} + L^{XIV}.$$

Tertio habetur jam simul etiam *Lex*, secundum quam x per istas L radices aequationis bimembris exprimitur. Adde nempe (2) aequationes duas primas, (quarum altera alterius quasi complementum est,) dein propter $x + p + q + r = -u$ habebis:

5)
$$Cx = L' + L^{XI} + L^{XVII} + L^{XIX}.$$

(ubi nempe $C = -(A+B)$). Et pro u reposui denuo x, siquidem id perinde est. Numerus C est ille absolutus, toties et semper occurrens, et sponte excidit, si pro L communiter ponas CL.) — Et sic ergo pro radice x prodit (5) forma illa *quadrimembris,* quam Eulerus et Lagrangius, incomparabiles viri, recte perviderunt, aberrarunt autem in lege *reliquarum* p, q, r, u determinandâ; quae lex omnino abstrusa est. — *Quarto;* sicut in tabulis (2.3) aequatio prima et *secunda* sibi in complementum sunt, et praecedentem (5) sistunt, similiter idem de tertia et *quarta*, de quinta et *sexta* patet, et sic deinceps. Et singula talis biga dabit scriptionem formae (5). Verbi causa par *ultimum* (3) dabit scriptionem:

$$Cx = L^{V} + L^{XXIII} + L^{IX} + L^{XIV}.$$

Et sic ergo radices L, beneficio tabularum (2.3); sponte distinguuntur in sex quaterniones *has:*

6) $L' + L^{XI} + L^{XVII} + L^{XIX}.$
$L''' + L^{XVI} + L^{VII} + L^{XXI}.$
$L^{VI} + L^{XXIV} + L^{X} + L^{XIII}.$

7) $L'' + L^{XII} + L^{XVIII} + L^{XX}.$
$L^{IV} + L^{XV} + L^{VIII} + L^{XXII}.$
$L^{V} + L^{XXIII} + L^{IX} + L^{XIV}.$

Positis his principiis et operationibus jam ad *formandas* aequationes transeo.

§. 39.

Recapitulatio totius [illegible] haec est. Sursolida data $x^5 + bx^3 - cx^2 + dx - y = 0$ mediante functione lineari (§. 37, Nro. 2) reducta est immediate ad bimembrem $V^5 - \Pi = 0$, vel $V^5 - L^5 = 0$ (§. 37, Nro. 4.) In isto typo autem fuit $L = \alpha^3 Mr - q + \alpha^4 p - Mx$. At heic inter x, p, q, r existunt 24 permutationes, quae sunt nempe nostrae $L' \ldots L^{XXIV}$. — Sic ergo pro $V^5 - L^5 = 0$ oriuntur distincte *hae:*

$$V^5 - \overset{I}{L}{}^5 = 0,\ V^5 - \overset{II}{L}{}^5 = 0, \ldots \text{ usque ad } V^5 - \overset{XXIV}{L}{}^5 = 0.$$

Ex his conflabitur ista $V^{120} - \mathfrak{A}V^{115} + \mathfrak{B}V^{110} - \ldots = 0$; cujus radices erunt $\overset{I}{L}{}^5 \ldots \overset{XXIV}{L}{}^5$. Et jam ergo divinam tabularum (§. 38, Nro. 2. 3, id est Nro. 6. 7) virtutem et indispensabile ministerium disces. — Quum enim praecedens aequatio, (quae effective ad gradum 24 adscendere putanda est,) in sex *biquadraticas* dirimenda sit:

1) $$V^{20} - \mathfrak{M}V^{15} + \mathfrak{N}V^{10} - \mathfrak{O}V^5 + \mathfrak{P} = 0,$$

ex quonam quaeso fonte electionem radicum L^5 heic faciendam *petiturus* fores? — Ex 24 quantitatibus $L' \ldots L^{XXIV}$ enim, quaternionum certe ultra *myriadem* eligere potes; ex quibus tamen *unica* tantum valebit et ad *scopum* ducet. At vero sic *tabularum* dictarum theoria et forma nos ab hac cura *absolvit*. Et nempe in praecedentem (1) competent ex (§. 38, Nro. 6) verbi causa praecise $L', L^{XI}, L^{XVII}, L^{XIX}$. Vel distincte loquendo, in aequationem:

A) $V^{20} - \mathfrak{M}'V^{15} + \mathfrak{N}'V^{10} - \mathfrak{O}'V^5 + \mathfrak{P}' = 0$ cadent radices:

$V^5 = \overset{I}{L}{}^5$, $V^5 = \overset{XI}{L}{}^5$, $V^5 = \overset{XVII}{L}{}^5$, $V^5 = \overset{XIX}{L}{}^5$. Et in istam:

B) $V^{20} - \mathfrak{M}^{VI}V^{15} + \mathfrak{N}^{VI}V^{10} - \mathfrak{O}^{VI}V^5 + \mathfrak{P}^{VI} = 0$ cadent radices:

$V^5 = \overset{V}{L}{}^5$, $V^5 = \overset{XXIII}{L}{}^5$, $V^5 = \overset{IX}{L}{}^5$, $V^5 = \overset{XIV}{L}{}^5$, et similiter pro intermediis aequationibus. — Vel ut clariorem obtutum reddam, erit verbi causa:

2) $\mathfrak{M}' = \overset{I}{L}{}^5 + \overset{XI}{L}{}^5 + \overset{XVII}{L}{}^5 + \overset{XIX}{L}{}^5$, et:

2) $\mathfrak{M}^{VI} = \overset{V}{L}{}^5 + \overset{XXIII}{L}{}^5 + \overset{IX}{L}{}^5 + \overset{XIV}{L}{}^5.$

et similiter pro intermediis $\mathfrak{M}''$, $\mathfrak{M}'''$, $\mathfrak{M}^{IV}$, $\mathfrak{M}^{V}$. Intuendo jam has (1. 2), et intuendo dein canones dictos (§. 38, Nro. 6 et 7) rem puto pervidebis, nec verba plura explicandi causa expectabis. — Ceterum vides, quod systema loci citati in *duo* systemata, nempe terna, dirimatur. Haec distinctio proficiscitur, ut vidisti, a distinctione *istarum* (§. 38, Nro. 2) in duo systemata; et ista *ternaria*, tanti est momenti, ut omnis resolutio sursolidae ab illa *pendeat*. Hujus enim ternarii systematis utriusque mirabilem sane naturam et effectum brevi ante oculos habebis. Et sic ergo (1) habemus aequationem pro V *biquadraticam* vel quasi, cujus vero coefficientes $\mathfrak{M}$ ... $\mathfrak{P}$ nanciscuntur valores praecise *sex*, ut vidimus, nempe ab $\mathfrak{M}'$ ... $\mathfrak{P}'$ usque ad $\mathfrak{M}^{VI}$ ... $\mathfrak{P}^{VI}$. — Et sic ergo res jam decurrit prorsus ut apud Lagrangium; habetur (1) *biquadratica* vel quasi, cujus coefficientes ab aequatione *sexti* gradus pendent. (Ceterum ex *Lagrangii* regula [illegible], quod res ab *una* tantum tali sexta pendeat, nempe ab ea pro *primo* coefficiente. Hac resoluta nempe docuit simul sextas pro *reliquis* $\mathfrak{N}, \mathfrak{O}, \mathfrak{P}$ resolutas esse.) — Ergo jam tandem eo deducti sumus, ubi *cardo* totius rei vertitur. Nempe valores V existunt numero 120, et ista (1) continet aequationes sex sibi similes; quae in se ductae istum 120 numerum debite explent. Et res ergo absoluta ab aequatione *sexti* gradus pendet. Unde quum Lagrangius hanc sextam tunc pro non resolubili proclamaverit, ergo nos *Resolubilitatem* rigore [illegible] et ipso facto demonstrare obligamur. Et id ergo [illegible] nostri operis est.

§. 40.

Sequitur ergo [illegible] quaerendi coefficientium [illegible]. Quos ordinatim jam [illegible].

1) $V^6 - [illegible] + \mathfrak{N}V^2 - \mathfrak{O}V + \mathfrak{P} = 0.$

Pendebit $\mathfrak{M}$ ut vidimus, a *sexti* gradus aequatione:

2) $K^6 - \pi' K^5 + \pi'' K^4 - \pi''' K^3 + \pi^{IV} K^2 - \pi^{V} K + \pi^{VI} = 0,$

radicum $\mathfrak{M}'$ ..... $\mathfrak{M}^{VI}$. — Haec (2) conflatur ex cubicis:

3) $K^3 - \varphi K^2 + \lambda K - \delta = 0$ radicum $\mathfrak{M}'$, $\mathfrak{M}''$, $\mathfrak{M}'''$.

4) $[illegible] = 0$ radicum $\mathfrak{M}^{IV}$, $\mathfrak{M}^{V}$, $\mathfrak{M}^{VI}$

in quibus ergo (§. 39, A et B) distincte habetur:

5) $\mathfrak{M}' = L^5 + \overset{\text{XI}}{L^5} + \overset{\text{XVII}}{L^5} + \overset{\text{XIX}}{L^5}.$

$\mathfrak{M}'' = L^5 + L^5 + L^5 + L^5.$

$\mathfrak{M}''' = \overset{\text{VI}}{L^5} + \overset{\text{XXIV}}{L^5} + \overset{\text{X}}{L^5} + \overset{\text{XIII}}{L^5}.$

et pro secunda cubica (4) similiter:

6) $\mathfrak{M}^{IV} = \overset{\text{II}}{L^5} + \overset{\text{XIV}}{L^5} + \overset{\text{XVIII}}{L^5} + \overset{\text{XX}}{L^5}.$

$\mathfrak{M}^{V} = \overset{\text{IV}}{L^5} + \overset{\text{XV}}{L^5} + \overset{\text{VIII}}{L^5} + \overset{\text{XXII}}{L^5}.$

$\mathfrak{M}^{VI} = \overset{\text{V}}{L^5} + \overset{\text{XXIII}}{L^5} + \overset{\text{IX}}{L^5} + \overset{\text{XV}}{L^5}.$

Jam respice (§. 38, Nro. 6—7); ante oculos nempe tum habebis, quod prioris tuae cubicae radices $\mathfrak{M}'$, $\mathfrak{M}''$, $\mathfrak{M}'''$ competant in ternarium illud systema *superius*, et secundae cubicae radices $\mathfrak{M}^{IV}$, $\mathfrak{M}^{V}$ $\mathfrak{M}^{VI}$ competant in ternarium systema *inferius*.

Et jam *omnia* et singula ad sursolidam resolvendam rite disposita et ordinata sunt. Postquam ergo haec omnia oculis ad satietatem perlustrasti, composita dein mente calculorum successum exspecta. — Inspice (5); quaerendus est valor $\mathfrak{M}'$. Redeundum ergo ad (§. 38, Nro. 1), et computandae

sunt radicum $L', L^{XI}, L^{XVII}, L^{XIX}$ quintae potentiae. Ita transacta et contractis membris, ante oculos erit:

$$\mathfrak{M}' = -6\mathfrak{A}xpqr$$
$$+ 5\mathfrak{B}'[p^4r + r^4p + q^4x + x^4q] + 10\mathfrak{C}'[p^2r^3 + r^2p^3 + q^2x^3 + x^2q^3]$$
$$+ 5\mathfrak{B}''[p^4x + x^4p + r^4q + q^4r] + 10\mathfrak{C}''[p^3x^2 + x^3p^2 + r^3q^2 + q^3r^2]$$
$$+ 5\mathfrak{B}'''[p^4q + q^4p + r^4x + x^4r] + 10\mathfrak{C}'''[p^3q^2 + q^3p^2 + r^3x^2 + x^3r^2]$$
$$+ 20\mathfrak{D}'[x^3pq + p^3rx + q^3rx + r^3pq]$$
$$+ 20\mathfrak{D}''[x^3rp + p^3xq + q^3xp + r^3xq]$$
$$+ 20\mathfrak{D}'''[x^3pq + p^3rq + q^3xp + r^3px]$$
$$+ 30\mathfrak{E}'[x^2p^2q + x^2p^2r + q^2r^2x + q^2r^2p]$$
$$+ 30\mathfrak{E}''[x^2q^2p + x^2q^2r + p^2r^2x + p^2r^2q]$$
$$+ 30\mathfrak{E}'''[x^2r^2p + x^2r^2q + p^2q^2x + p^2q^2r]$$

[Pro membro supremo nempe prodit $6\mathfrak{A}pqrx(x+p+q+r)$, pro [illegible] manifeste [illegible]. Theodisci autem $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}'$ ... sunt numeri [illegible] literam α, [illegible] infra suo tempore exhibebo.] Jam vero [illegible] scribere [illegible] loco (7) scribam breviter sic:

$$\mathfrak{M}' = -F + 5\mathfrak{B}'P' + 10\mathfrak{C}'Q' + 20\mathfrak{D}'R' + 30\mathfrak{E}'X'$$
$$+ 5\mathfrak{B}''P'' + 10\mathfrak{C}''Q'' + 20\mathfrak{D}''R'' + 30\mathfrak{E}''X''$$
$$+ 5\mathfrak{B}'''P''' + 10\mathfrak{C}'''Q''' + 20\mathfrak{D}'''R''' + 30\mathfrak{E}'''X'''.$$

Intuendo istam (7), sponte [illegible] substitutionem [illegible]. Et [illegible] ergo hoc (8) brevi scriptionis genere jam ad (5) terminum $\mathfrak{M}''$ progredior. Ex (5) [illegible] habebitur:

9) $$\mathfrak{M}'' = -F + 5\mathfrak{B}''P' + 10\mathfrak{C}''Q' + 20\mathfrak{D}''R' + 30\mathfrak{E}''X'$$
$$+ 5\mathfrak{B}'''P'' + 10\mathfrak{C}'''Q'' + 20\mathfrak{D}'''R'' + 30\mathfrak{E}'''X''$$
$$+ 5\mathfrak{B}'P''' + 10\mathfrak{C}'Q''' + 20\mathfrak{D}'R''' + 30\mathfrak{E}'X'''.$$

Denique *tertiam* quoque (5) similiter evolvendo habebitur:

10) $$\mathfrak{M}''' = -F + 5\mathfrak{B}'''P' + 10\mathfrak{C}'''Q' + 20\mathfrak{D}'''R' + 30\mathfrak{E}'''X'$$
$$+ 5\mathfrak{B}'P'' + 10\mathfrak{C}'Q'' + 20\mathfrak{D}'R'' + 30\mathfrak{E}'X''$$
$$+ 5\mathfrak{B}''P''' + 10\mathfrak{C}''Q''' + 20\mathfrak{D}''R''' + 30\mathfrak{E}''X'''.$$

Jam ergo labor pro his tribus absolutus est. Et patet, omnes tres exhiberi per *easdem* functiones $P' \ldots X' \ldots$ id est, per easdem functiones radicum x, p, q, r. Et unicum discrimen positum esse in theodiscorum seu numericorum coefficientium *translocatione*. Et porro simul patet, unde hae sex radices $\mathfrak{M}' \ldots \mathfrak{M}^{VI}$ *oriantur*. Nimirum functio ut $\mathfrak{B}'P' + \mathfrak{B}''P'' + \mathfrak{B}'''P'''$ ita comparata est, ut coefficientes theodisci dati possint expresse *sexies* ad incognitas P', P'', P''' translocari.

§. 41.

Sed jam theodiscos valores ordine exhibeo.

1) $\mathfrak{A} = 4\alpha + 3\alpha^2 - 3\alpha^3 - 4\alpha^4.$

$\mathfrak{B}' = -4\alpha - 2\alpha^2 + 2\alpha^3 + 4\alpha^4.$	$\mathfrak{C}' = -5\alpha - 3\alpha^2 + 3\alpha^3 + 5\alpha^4.$
$\mathfrak{B}'' = 4\alpha + [illegible]$	$\mathfrak{C}'' = [illegible]$
$\mathfrak{B}''' = 4\alpha + 5\alpha^2 - 5\alpha^3 - 4\alpha^4.$	$\mathfrak{C}''' = 8\alpha + 6\alpha^2 - 6\alpha^3 - 8\alpha^4.$
$\mathfrak{D}' = 0.$	$\mathfrak{E}' = 2\alpha + \alpha^2 - \alpha^3 - 2\alpha^4.$
$\mathfrak{D}'' = 5\alpha + 3\alpha^2 - 3\alpha^3 - 5\alpha^4.$	$\mathfrak{E}'' = -2\alpha - \alpha^2 + \alpha^3 + 2\alpha^4.$
$\mathfrak{D}''' = \alpha^4 - \alpha$	$\mathfrak{E}''' = 4\alpha + 3\alpha^2 - 3\alpha^3 - 4\alpha^4.$

Ex his addendo habentur valores:

2) $\mathfrak{B}' + \mathfrak{B}'' + \mathfrak{B}''' = 4a + 3a^2 - 3a^3 - 4a^4$

$\mathfrak{C}' + \mathfrak{C}'' + \mathfrak{C}''' = 4a + 3a^2 - 3a^3 - 4a^4$

$\mathfrak{D}' + \mathfrak{D}'' + \mathfrak{D}''' = 4a + 3a^2 - 3a^3 - 4a^4$

$\mathfrak{E}' + \mathfrak{E}'' + \mathfrak{E}''' = 4a + 3a^2 - 3a^3 - 4a^4$

Hae summae ergo omnes inter se *aequales* existunt, et ideo communiter dicantur $= \mathfrak{K}$. Similiter patet esse:

3) $\mathfrak{A} = \mathfrak{K}$.

[illegible] (Nro. [illegible])

4) [illegible] $+ \mathfrak{M}''' = \mathfrak{A}$.

Ergo nunc istas tres (§. 40, Nro. 8. 9. 10) *adde*, et erit:

5) $\varphi = -3F + 5[\mathfrak{B}' + \mathfrak{B}'' + \mathfrak{B}'''][P' + P'' + P'''] + 10[\mathfrak{C}' + \mathfrak{C}'' + \mathfrak{C}'''][Q' + Q'' + Q''']$
$+ 20[\mathfrak{D}' + \mathfrak{D}'' + \mathfrak{D}'''][R' + R'' + R'''] + 30[\mathfrak{E}' + \mathfrak{E}'' + \mathfrak{E}'''][X' + X'' + X''']$.

Id est, ob summas (Nro. 2) aequales et $\mathfrak{K}$ dictas erit:

6) $\varphi = -3F + 5\mathfrak{K}[P' + P'' + P'''] + 10\mathfrak{K}[Q' + Q'' + Q''']$
$+ 20\mathfrak{K}[R' + R'' + R'''] + 30\mathfrak{K}[X' + X'' + X''']$.

Intuere nunc (§. 40) istam (Nro. 7) et ejus substitutam (Nro. 8). Videbis $P' + P'' + P'''$ formare functionem radicum x, p, q, r *symmetricam*. Et idem de aggregatis $Q' + Q'' + Q'''$ et porro in oculos cadit. Jam quia functionum pure symmetricarum satis est *unicum* terminum scribere, ex quo ceteri omnes subintelligi vel scribi possunt, ideo loco hujus [illegible]

7) $\varphi = -180\mathfrak{A}y + 5\mathfrak{K}[\text{[illegible]} + \ldots] + 10\mathfrak{K}[p^3r^2 + \ldots]$
$+ 20\mathfrak{K}[x^3pq + \ldots] + 30\mathfrak{K}[x^2p^2q + \ldots]$.

Hae radicum x, p, q, r functiones symmetricae possunt jam per quintam radicem residuam u exprimi, ut supra docui. Hunc in finem nempe supra (§. 25, Nro. 9) functiones praecise has *exhibui*. In quo loco autem pro A, B, C, D repones notatos ibi valores $A = -u$, $B = b + u^2$, et porro. Et sic jam functiones [illegible] symmetricas habebis expressas per quintam radicem u. Atque sic jam ante oculos est haec:

8) $\varphi = -180\mathfrak{A}y + 5\mathfrak{K}[11u^5 + 11bu^3 - 11cu^2 + 11du + bc]$.

Sed est $11[u^5 + bu^3 - cu^2 + du] = 11y$, quo imposito fit:

$\varphi = -180\mathfrak{A}y + 5\mathfrak{K}[bc + 11y]$ id est:

$\varphi = [55\mathfrak{K} - 180\mathfrak{A}]y + 5\mathfrak{K}bc$. Sed (3) est $\mathfrak{K} = \mathfrak{A}$, ergo tandem:

9) $\varphi = 5\mathfrak{A}[bc - 25y]$.

§. 42.

Restat jam cubica *posterior* (§. 40, Nro. 4 et 6), pro qua nempe quintae potentiae valorum L prorsus ut priori casu computandae sunt. Prodeunt prorsus eaedem quae priori casu functiones radicum x, p, q, r, ergo iisdem ut supra substitutionibus uti licet. Etiam *theodiscos* coefficientes offendes ibi eosdem, sed alia denuo *translocatione*. Quare his omnibus, quae supra, denominationibus conservatis ante oculos tibi pro $\mathfrak{M}^{V}$ (§. 40, Nro. 6) erit *haec*:

1) $\mathfrak{M}^{IV} = -60\mathfrak{A}y + 5\mathfrak{B}'''P' + 10\mathfrak{C}'''Q' + 20\mathfrak{D}'R' + 30\mathfrak{E}'X'$
$+ 5\mathfrak{B}'P'' + 10\mathfrak{C}'Q'' + 20\mathfrak{D}''R'' + 30\mathfrak{E}'''X''$
$+ 5\mathfrak{B}''P''' + 10\mathfrak{C}''Q''' + 20\mathfrak{D}'''R''' + 30\mathfrak{E}''X'''$.

Similiter pro $\mathfrak{M}^{V}$ ante oculos remiscoris hanc:

2) $\mathfrak{M}^{V} = -60\mathfrak{A}y + 5\mathfrak{B}''P' + 10\mathfrak{C}''Q' + 20\mathfrak{D}'R' + 30\mathfrak{E}''X'$
$+ 5\mathfrak{B}'P'' + 10\mathfrak{C}'Q'' + 20\mathfrak{D}''R'' + 30\mathfrak{E}'X''$
$+ 5\mathfrak{B}'''P''' + 10\mathfrak{C}'''Q''' + 20\mathfrak{D}'''R''' + 30\mathfrak{E}'''X'''$.

Similiter pro $\mathfrak{M}^{VI}$ denique obtinebis istam:

3) $\mathfrak{M}^{VI} = -60\mathfrak{A}y + 5\mathfrak{B}'P' + 10\mathfrak{C}'Q' + 20\mathfrak{D}''R' + 30\mathfrak{E}''X'$
$+ 5\mathfrak{B}'''P'' + 10\mathfrak{C}'''Q'' + 20\mathfrak{D}''R'' + 30\mathfrak{E}''X''$
$+ 5\mathfrak{B}''P''' + 10\mathfrak{C}''Q''' + 20\mathfrak{D}'R''' + 30\mathfrak{E}'X'''$.

Laboribus his omnibus peractis, jam accipe admirandam in his (1. 2. 3) theodiscorum valorum translocationem inter se. Quum enim (§. 40, Nro. 4) sit:

4) $\mathfrak{M}^{IV} + \mathfrak{M}^{V} + \mathfrak{M}^{VI} = \psi$,

ideo (1. 2. 3) addendis omnibus tribus habebis:

5) $\psi = -180\mathfrak{A}y + 5[\mathfrak{B}' + \mathfrak{B}'' + \mathfrak{B}'''][P' + P'' + P'''] + 10[\mathfrak{C}' + \mathfrak{C}'' + \mathfrak{C}'''][Q' + Q'' + Q''']$
$+ 20[\mathfrak{D}' + \mathfrak{D}'' + \mathfrak{D}'''][R' + R'' + R'''] + 30[\mathfrak{E}' + \mathfrak{E}'' + \mathfrak{E}'''][X' + X'' + X''']$.

Et ecce ergo, quod etiam *haec* theodiscorum dispositio, sicut ea in (1. 2. 3) praesto est, pro ψ formas plane *symmetricas* et ipso facto et omnimode cum superiori (§. 41, Nro. 5) *consentientes* in medio sistat. Ergo nova reductione non opus est, siquidem prorsus ut supra fieret:

6) $\psi = 5\mathfrak{A}[bc - 25y]$.

Et jam ergo ad optatum finem perducti scimus esse:

7) $\varphi = \psi$.

Atque *hoc* igitur fuit illud molimen calculi, quo ex myriadibus valorum L^{λ} quaternionibus praecise *istas* (§. 38, Nro. 6 et 7) distinctas quasi separaverit, et has *easdem* sex quaterniones porro in istas *triadas* ibidem, nempe superiorem et inferiorem discreverit. — Jam enim articulo temporis omnem successum ante oculos habebis. Respice ad (§. 40, Nro. 2. 3. 4), habuimus ibi aequationem sexti gradus, pro qua subinde posui duas *cubicas*. Hae cubicae jam vi demonstratorum ita comparatae sunt, ut coefficientem primum *Eundem habeant*, nempe $\varphi = \psi$, et cujus proprietatis beneficio, quod sextam dictam expresse *debellatum* est, et relabitur sexta debito modo ad *cubicam*, ut nunc videbimus.

§. 43.

Habemus nempe problema jam facile et pulcherrimum tale. Datur aequatio:

$$K^6 - \pi' K^5 + \pi'' K^4 - \pi''' K^3 + \pi^{IV} K^2 - \pi^{V} K + \pi^{VI} = 0,$$

quae in duas cubicas hujus formae sciatur dirimi posse:

$$K^3 - \varphi K^2 + \lambda K - \delta = 0$$
$$K^3 - \varphi K^2 + \omega K - \vartheta = 0,$$

quae cubicae nempe coefficientem primum *communem* seu *eundem* habent. Et quaeritur ergo, a quonam gradu *resolutio* sextae talis pendeat. — (Et potest ergo res ab omni cossa *independenter* tractari, et nempe formari problema mere algebraicum tirocinii instar *tale*. „Datur aequatio sexti gradus, de qua constet, factores ejus cubicos habere $\varphi = \psi$, seu coefficientem primum *eundem*; et quaeritur jam sextae hujus *resolutio*.“ — Talis autem sexta necessario involvet quandam inter suos coefficientes *relationem* seu *Specialitatem*. Atque haec relatio $F(\pi' \ldots \pi^{VI}) = 0$, ad proprietatem $\varphi = \psi$ requisita, vel *immediate* dabitur, vel si (ut nostro casu fit,) coefficientes $\pi' \ldots \pi^{VI}$ indeterminate et sine omni relatione scribuntur, tum ex ipso *calculo* ista relatio sponte resultabit et *emerget*. Nam si ambarum cubicarum *productum* sumis, et orientem inde sextam cum proposita sexta comparabis, comparatio haec offert aequationes *sex*, in quibus autem (propter $\varphi = \psi$) insunt incognitae nonnisi *quinque*

$\varphi, \lambda, \delta, \omega, \vartheta$. Ex aequationibus autem sex istis incognitas has quinque ejice vel ejusdem puta, et remanebit (jam) quod erat quaerendum, inter $\pi' \ldots \pi^{VI}$ *relatio*. — Ad has quinque $\varphi, \lambda, \delta, \omega, \vartheta$ *determinandas* autem, sufficiunt ergo aequationes *quinque* ex istis sex; et una alterutra talis aequatio igitur superflua erit. Haec omissa vero superflua aequatio nempe sponte cum reliquis identico sensu consentiet, et nempe nil nisi dictam *relationem* in se involvet. — In praesenti negotio operationum elegantiae consulitur, (ut patebit,) si aequatio expresse *quinta*, literam π^{V} nempe continens, ad exclusionem seponitur. — Quoniam autem tota fusoci surrsolidi problematis resolutio pendet ab hac *sextae* praesentis resolubilitate, ideo jucundum aeque ac utile est, factorem rem a casu simpliciori familiarem tibi reddere. Ponam ob rationem ergo casum facillimum (sed qui egregie ad scopum facit) *hunc*: — „Datur biquadratica:

$$K^4 - \pi' K^3 + \pi'' K^2 - \pi''' K + \pi^{IV} = o,$$

quam constet, in factores quadraticos decomponi *hos*:

$$K^2 - \varphi K + \lambda = o \qquad K^2 - \varphi K + \omega = o.$$

Et quaeritur biquadraticae hujus *resolutio*; vel quaeritur potius, a quonam *gradu* pendeat hujus specialis biquadraticae resolutio." — Casum hunc ergo perlustra tecum ad normam praecise eorum, quae subinde hactenus dixi, et clare rem totam introspicies.] — His praemissis ergo jam ipso facto demonstrandum est, praesentem sextam nostram, (proprietate nempe $\varphi = \psi$ gaudentem,) esse *Resolubilem*. Sume cubicarum nostrarum productum:

$$K^6 - 2\varphi K^5 + [\varphi\varphi + \lambda + \omega] K^4 - [\varphi(\lambda + \omega) + \delta + \vartheta] K^3 + [\varphi(\delta + \vartheta) + \omega\lambda] K^2 - [\omega\delta + \lambda\vartheta] K + \delta\vartheta = o. \quad \text{Ergo:}$$

1) $\pi' = 2\varphi$. 3) $\pi''' = \varphi[\lambda + \omega] + \delta + \vartheta$. 5) $\pi^{VI} = \delta\vartheta$.

2) $\pi'' = \varphi\varphi + \lambda + \omega$. 4) $\pi^{IV} = \varphi[\delta + \vartheta] + \omega\lambda$

Propter venustatem rei loquar jam ad modum geometriae analyticae. Ex (1) immediate datur φ. Deinde in (2) ob datam φ datur $\lambda + \omega$. Deinde in tertia ob datas φ et $\lambda + \omega$ datur $\delta + \vartheta$. Porro in (4) ob datas φ et $\delta + \vartheta$ datur $\omega\lambda$; denique in (5) $\delta\vartheta$ *immediate* datur. — Jam ergo attende ad eas partes, quas *datas* dixi. Dixi datas esse:

$$\lambda + \omega = A. \qquad \delta + \vartheta = C.$$

$$\lambda\omega = B. \qquad \delta\vartheta = D.$$

Ergo dantur duae quadraticae tales respective:

6) $P^2 - AP + B = o$ radicum λ, ω.

7) $Q^2 - CQ + D = o$ radicum δ, ϑ.

Unde sexta dicta in cubicas dictas decomponitur mediantibus duabus (6. 7) *quadraticis*. Vel actuales ex (2—5) valores depromendo, fiet:

$$P^2 - [\pi'' - \varphi\varphi] P + \pi^{IV} - \varphi\pi''' + \varphi^2\pi'' - \varphi^4 = o$$

$$Q^2 - (\pi''' - \varphi\pi'' + \varphi^3) Q + \pi^{VI} = o. \quad \text{(In his repone, si lubet } \varphi = \frac{\pi'}{2}.)$$

Et sic ergo resolubilitas dictae sextae ipso facto demonstrata est; et qui reliquos $\pi'' - \pi^{VI}$ computare, in mentem inducet, (vidisti molem laboris pro solo *primo* π',) is jam scit, sextam suam a *cubica* tantum pendere, quae cubica dein a mera *quadratica* pendeat. — Jam quaeso sub finem, hanc materiam omnem generali quasi obtutu amplectere. Aequatio surrsolida universalis mediante cabbala ad *bimembrem* reducta fuit, et prodit relatio cabbalistica (§. 37. Nro. 2) ad hunc finem requisita. Ex hac dein prodiere isti viginti quatuor (§. 38. Nro. 1) tanquam egregia Soboles, quae ibidem (Nro. 2) in *duas* cohortes vel tabulas secedebat, ex quibus jam ibidem (Nro. 6—7) duplex *quaternionum* tabula

prognata fuit. Qua duplici tabula data omnes operationes *reliquae* datae fuerunt. — Moneamus autem hoc loco, quod (§. 38, Nro. 6) etiam e *simplicibus* terminis quaternionem formantibus (exempli causa ex L', L^{XI}, L^{XVII}, L^{XIX}) possint formari biquadraticae, nimirum $L' - (\alpha^3 M n - q + \alpha p \ldots) = o$ et cet. in se ducendo. Et oriuntur tali modo aequationes illae, quas alias *relationales* dixi: atque talis aequatio dicenda erit relationalis *tertii* generis, respectu nempe ejus, quam alias supra dixeram relationalem *primi* generis. — Qui autem ex *una* quaternione, (verbi causa ex dicta) biquadraticam formarit, simul *omnes* habebit. Nam ea in suis coefficientibus praecise offert functiones illas, quibus supra P', P'', P''' dixeram; et quae nempe numero semper *terno* existunt, sed propter combinationem cum theodiscis $\mathfrak{B}'$... numerum *senarium* mentiuntur. — [illegible] quidem haec omnia, et [illegible] rem didici, sed longiora forent, et locum non reperiunt.

§. 44.

Sed subit animum quod uno saltim negotio dispensare me non possim, nempe tenorem et legem *reliquarum* radicum exhibendi. Posito enim (§. 38, Nro. 5):

1) $$Cx = L' + L^{XI} + L^{XVII} + L^{XIX}$$

obscurum adhuc manet, qualis fiat pro *ceteris* p, q, r, u distinctio. — Eulerus quum posuisset $x = P + Q + R + S$, et pro quavis alia radice dein $p = \alpha P + \beta Q + \gamma R + \delta S$, probe vidit, hic non 4 sed 24 translocationes fieri. Quare *potentias* posuit:

2) $$p = \alpha P + \alpha^2 Q + \alpha^3 R + \alpha^4 S \qquad r = \gamma P + \gamma^2 Q + \gamma^3 R + \gamma^4 S$$
$$q = \beta P + \beta^2 Q + \beta^3 R + \beta^4 S \qquad u = \delta P + \delta^2 Q + \delta^3 R + \delta^4 S.$$

Siquidem sciret, ejusmodi potentiis respondere radices $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ *ipsas*. Et sic ergo ante oculos *pinxit* saltim aliquid, quod pro distinctione radicum p, q, r, u venditavit; et videbatur sibi pictura tali ex istis 24 translocationibus expresse quatuor casus *elegisse*, ceteras autem translocationes *exclusisse*. At vero sic nihil efficitur. Nam β, γ, δ nil sunt nisi merae potentiae radicis *primae* α, quare in (2) reponendum $\beta = \alpha^2$, $\gamma = \alpha^3$, $\delta = \alpha^4$. Quo facto omnis illa spectaculi venustas *tollitur* subinde, et apparet perturbata satis dignitatum $\alpha, \alpha^2 \ldots$ *miscela* quasi, quae nempe *nullam* amplius prae ceteris translocationibus exclusis praerogativam prae se fert. Ordinatio ista (2) ergo merus praestigiarum lusus est, at intellectui nil satisfaciens. Ubi primum enim omnia ad unam radicem α, ut dixi, revocantur, tum sane *nullum* argumentum seu causa exstat vel perhibetur, cur ordinatio jam prodiens, expresse et exclusive *genuina*, exclusae autem ordinationes *spuriae* sint. Quonam juris titulo igitur has reliquas nil tale merentes extorres fecit? Vel si illas *admittit* jam igitur, tum vero pro resolvenda surdesolida habebit radices non *quinque*, sed quinque et *viginti*. — Vicissim *Lagrangius*. Is pro resolvente sua aequatione $P^4 - \mathfrak{A}P^3 + \mathfrak{B}P^2 - \mathfrak{C}P + \mathfrak{D} = o$ reperit, coefficientes $\mathfrak{A}$... pendere a *sexta*. At vero cum ergo valores pro $\mathfrak{A}$ *sex* habiturus erat, ideoque pro P valores non 4 sed 24, quem quaeso sanum sensum habebit illius positio?

3) $$x = \alpha P' + \alpha^2 P'' + \alpha^3 P''' + \alpha^4 P^{IV}.$$

Quum enim habeat radices $P' \ldots . P^{XXIV}$, quasnam ex his 24 in formula sua (3) *intellectas* expresse vult? Et ubi manent *reliquae*? Vel quum 24 pro P valores habiturus erat, quo pacto sperare potuit, omnes x, p, q, r, u radices per solas *quatuor* valores P', P'', P''', P^{IV} expressum iri, ceteris $P^{V} \ldots$ nihil concurrentibus? — His praemissis, obscurissimam hanc rem ex fontibus cabbalae expediemus. Et videbimus nempe, dispositione secundum potentias $\alpha, \alpha^2 \ldots$ facta, radices x, p, q, r, u exprimi non per *quatuor* valores L, ut hallucinatus est Lagrangius, verum debite per *omnes* $L' \ldots L^{XXIV}$; (magni viri manes mihi condonent autem.) Ea res (alias certe abstrusissima, pro tanto radicum L numero) ex cabbala sponte et facile expeditur. Brevitatis autem causa a posteriori tantum satisfaciam lectoribus; qui

igitur coeco obsequio eventum expectent. In hoc negotio autem a quaternionibus valorum L penitus disceditur, ideoque promiscue tota cohors (§. 38, Nro. 1) ante oculos ponenda est. Ibi ex mera additione obtinuimus loco citato (Nro. 5):

$$Cx = L' + L^{XXI} + L^{XVII} + L^{XIX}.$$

(Permutatus autem ibi fuit x loco u, ut ibidem vides. Quare infra, quod probe notabis, vice versa pro u scribam x.) — Et fuit ibi $C = -(A+B)$; sed $A = \alpha^3 M - 1$ et $B = \alpha^4 - M$, unde habetur:

4) $$C = 2 + \alpha - \alpha^3 - 2\alpha^4.$$

Jam quaeso ad brevem operationem obsequiose habe. Ex tabula nostra (§. 38, Nro. 1) seorsim in charta scribe aequationes L', L^{XVI}, L^{XIX}, L^{XXI}. Ex his dein mediante $p = -(x+q+r+u)$ eliminabis p, quod articulo temporis factum erit. Novarum 4 aequationum sic obtinendarum primam multiplicabis per α, secundam per α^2, tertiam per α^4, quartam per α^3, deinde omnes quatuor *adde*, et pro $x+q+r+u$ repone $-p$. Sic ante oculos habebis jam sequentes (5) formulas, cum tabularibus nostris (§. 38, Nro. 1) ex asse conspirantes:

5)
$$\alpha L' = \alpha^5 Mx - u + \alpha^4 r - Mq.$$
$$\alpha^2 L^{XVI} = \alpha^5 Mr - q + \alpha^4 x - Mu.$$
$$\alpha^4 L^{XIX} = \alpha^5 Mq - r + \alpha^4 u - Mx.$$
$$\alpha^3 L^{XXI} = \alpha^5 Mu - x + \alpha^4 q - Mr.$$

6) $$\alpha L' + \alpha^2 L^{XVI} + \alpha^3 L^{XXI} + \alpha^4 L^{XIX} = Cp.$$

Jam porro ex tabularibus nostris scribe seorsim L', L''', L^{VII}, L^{XIX}; ex his mediante $q = -(x+p+r+u)$ ejicies q. In resultantibus novis fac eas multiplicationes per potentias α, quas ipse obtutus (7) offert. Et jam eas *adde*, et pro $x+p+r+u$ repone $-q$. Fiet:

7)
$$\alpha^4 L' = \alpha^5 Mp - x + \alpha^4 u - Mr$$
$$\alpha^3 L''' = \alpha^5 Mu - r + \alpha^4 p - Mx$$
$$\alpha^2 L^{VII} = \alpha^5 Mx - p + \alpha^4 r - Mu$$
$$\alpha L^{XIX} = \alpha^5 Mr - u + \alpha^4 x - Mp$$

8) $$\alpha L^{XIX} + \alpha^2 L^{VII} + \alpha^3 L''' + \alpha^4 L' = Cq.$$

Jam porro ex tabularibus scribe seorsim L', L^{X}, L^{XIX}, L^{XXIV}; ex his mediante $r = -(x+p+q+u)$ ejicies r. In resultantibus novis fac eas multiplicationes per potentias α, sicut (Nro. 9) obtutus designat. Et jam eas adde, et pro $x+p+q+u$ repones $-r$. Sic fiet:

9)
$$\alpha^2 L' = \alpha^5 Mq - p + \alpha^4 x - Mu$$
$$\alpha L^{X} = \alpha^5 Mx - u + \alpha^4 q - Mp$$
$$\alpha^3 L^{XIX} = \alpha^5 Mu - x + \alpha^4 p - Mq$$
$$\alpha^4 L^{XXIV} = \alpha^5 Mp - q + \alpha^4 u - Mx.$$

10) $$\alpha L^{X} + \alpha^2 L' + \alpha^3 L^{XIX} + \alpha^4 L^{XXIV} = Cr.$$

Denique ex tabularibus desume L', L^{VI}, L^{XIII}, L^{XXI}. Ex his mediante $x = -(u+p+q+r)$ eliminabis x. In resultantibus novis fac eas multiplicationes per potentias α, sicut (Nro. 11) obtutus designat. Et jam eas adde, et pro $u+p+q+r$ repone x. Ita fiet:

11)
$$\alpha^3 L' = \alpha^5 Mu - r + \alpha^4 q - Mp.$$
$$\alpha^4 L^{VI} = \alpha^5 Mq - p + \alpha^4 u - Mr.$$

$$\alpha L^{XIII} = \alpha^3 Mr - u + \alpha^4 p - Mq$$
$$\alpha^2 L^{XIX} = \alpha^3 Mp - q + \alpha^4 r - Mu.$$

12) $$\alpha L^{XIII} + \alpha^2 L^{XIX} + \alpha^3 L' + \alpha^4 L^{VI} = Cu.$$

(Hic enim pro x posui u, ob commutationem radicum x, u supra dictam. — Volui enim radicem eam, quae nullam potentiam α continet, ex recepto more expresse per x designare.) — Sic ergo jam aequationes (1.6.8.10.12) quaesito *respondent*, et (posito concinnitatis causa CL pro L, id est CL' pro L', et sic porro) habentur quinque radices:

13)
$$x = L' + L^{XI} + L^{XVIII} + L^{XIX}.$$
$$p = \alpha L' + \alpha^2 L^{XVI} + \alpha^3 L^{XXI} + \alpha^4 L^{XIX}.$$
$$q = \alpha L^{XIX} + \alpha^2 L^{VII} + \alpha^3 L''' + \alpha^4 L'.$$
$$r = \alpha L^{X} + \alpha^2 L' + \alpha^3 L^{XIX} + \alpha^4 L^{XXIV}.$$
$$u = \alpha L^{XIII} + \alpha^2 L^{XIX} + \alpha^3 L' + \alpha^4 L^{VI}.$$

Sic ergo ipso *facto* constat, quam parum idonea Lagrangii positio fuerit; qui nempe biquadraticae suae resolventis coefficientes a *sexta* dependere, ideoque biquadraticam hanc valores quatuor et viginti continere, recte quidem pervidit, — at nihilominus radices omnes x, p, q, r, u per meros *quatuor* tales valores expressum iri praesumit. — Et haec (13) ergo est illa radicum x, p, q, r, u secundum valores L'.... *distributio;* quae res, tantum non impenetrabilis aliâs visa, ex cabbalae fonte tam facile et sponte fluit. — Observabis autem, in istis (13) valores L' et L^{XIX} per totum systema *communiter* occurrere, et ita quidem, ut symmetrica ordinatio debite prorsus exhauriatur. Nimirum ante oculos est symmetricus quasi Dualismus:

$$p = \alpha L' + \alpha^4 L^{XIX} \ldots\ldots \qquad r = \alpha^2 L' + \alpha^3 L^{XIX} \ldots$$
$$q = \alpha L^{XIX} + \alpha^4 L' \ldots\ldots \qquad u = \alpha^2 L^{XIX} + \alpha^3 L' \ldots$$

In *toto* autem, systema (13) continet valores L *duodecim*, nempe valorum omnium praecise *dimidium.* — Simul patet, quod distributio talis (13) possit *sex* diversis modis exhiberi; prout nempe pro prima radice x quaternionem ipsarum L hanc vel *hanc* eligas. Harum quaternionum pro x duas extremas exhibui (§. 38, Nro. 5 et M), nempe primam et ultimam. At formas has compossibiles exhibere, nil attinet. Systema (13) esse potest instar omnium. — Valores L'.... L^{XXIV}, ut a me demonstratum est, omnes in *potestate* mortalium sunt. Id est, si F designet functionem competentem, habebitur:

$$L' = F'(b, c, d, y) \quad L'' = F''(b, c, d, y) \ldots\ldots \quad L^{XXIV} = F^{XXIV}(b, c, d, y).$$

Inventis autem L', L'',... omnibus, inventi sunt x, p, q, r, u.

§. 45.

Vidimus (§. 44, Nro. 13), radices x, p, q, r, u sursolidas exhiberi per functiones omnino quidem secundum *potentias* α, α^2, α^3, α^4 procedentes, at *ita* tamen, ut valores L non *quatuor* sed *duodecim* in conflictum concurrant. — Ergo jam unica tantum quaestio restat, ad quam respondendum est; nempe an fieri possit, ut *omnes* tamen x, p, q, r, u per solas tantum *quatuor* valores L exhibeantur? Vel (cum id ita *fieri* a me demonstretur), qualis casu hoc totius rei forma et conditio fit? — Et problema hic longe pulcherrimum ante oculos habemus. — Inspice (§. 44, Nro. 13) valorem pro prima radice x. Cernis hic quaternionem hactenus usurpatam, per quam haec radix x exprimitur. Scribe ergo ex tabula (§. 38, Nro. 1) has quatuor aequationes:

$$L' = \alpha^3 Mr - q + \alpha^4 p - Mx \text{ et porro } L^{XI}, \; L^{XVIII}, \; L^{XIX}.$$

His additis habebis $Cu = L' + L^{XI} + L^{XVII} + L^{XIX}$. Sed meministi, quod hactenus radices u et x *permutaverim* inter se. Volebam enim ex more recepto, non radicem u sed praecise x per eam quaternionem exhibere, quae a dignitatibus α *libera* esset. (Si ab initio §. 37, Nro. 2 loco radicis u eliminassem potius x, tum haec permutatio superflua fuisset.) Ergo in tuis quatuor, quas scripsisti, aequationibus pone u loco x, sic vice versa illorum additio per x et non per u exhibebitur. Id quod unice intendimus. Et sic ergo has quatuor aequationes ante oculos habebis:

$$1)\qquad \begin{aligned} L' &= \alpha^3 Mr - q + \alpha^4 p - Mu \\ L^{XI} &= \alpha^3 Mq - r + \alpha^4 u - Mp \\ L^{XVII} &= \alpha^3 Mp - u + \alpha^4 r - Mq \\ L^{XIX} &= \alpha^3 Mu - p + \alpha^4 q - Mr \end{aligned}$$

$$2)\qquad L' + L^{XI} + L^{XVII} + L^{XIX} = Cx.$$

Hic ergo (2) radix x sponte per suas quatuor L exhibetur. At jam porro *praecedentes* quatuor inspice. Habentur nempe *aequationes* quatuor cum *incognitis* quatuor p, q, r, u, ergo eliminandis tribus p, q, r semper habebitur quarta u per solas L. Ergo problema theoretice semper in potestate et insuper facillimum est. Et sane magna me exspectatio tenuit, qualis hic lex proditura sit. Quoniam autem ergo radices x, p, q, r, u per solas *quatuor* L exprimendae sunt, ideo ab omnibus reliquis L prorsus in hoc negotio abstrahimus; ergo ob formularum venustatem, nostros quatuor praesentes L'... libere per P, Q, R, S exprimamus. Quoniam autem (2) radix x habet numerum absolutum praefixum C, is omnino prius *tollendus* est, id quod supra jam fecimus, ponendo nempe communiter CL pro C. Positis ergo verbi causa:

$$3)\qquad L' = CQ,\ L^{XI} = CR,\ L^{XVII} = CS,\ L^{XIX} = CP,$$

tum loco (1) ante oculos habebis formas debitas:

$$4)\qquad \begin{aligned} CQ &= \alpha^3 Mr - q + \alpha^4 p - Mu \\ CR &= \alpha^3 Mq - r + \alpha^4 u - Mp \\ CS &= \alpha^3 Mp - u + \alpha^4 r - Mq \\ CP &= \alpha^3 Mu - p + \alpha^4 q - Mr \end{aligned}$$

$$5)\qquad x = P + Q + R + S;$$

ubi nempe (5) oritur addendis prioribus (4). Meministi enim (§. 44, Nro. 4) esse $C = -(\alpha^3 M - 1 + \alpha^4 - M)$ id est: $C = 1 + \alpha - \alpha^3 - 2\alpha^4$. Et jam ergo ex istis (4) ternae p, q, r tibi *eliminandae* sunt. Quo negotio autem satis molesto dispensare te potes, rem ex formulis meis a *posteriori* examinando. Oritur enim, (valore pro x debite praemisso) haec tota compages:

$$6)\qquad \begin{aligned} x &= P + Q + R + S \\ p &= \mathfrak{A}P + \mathfrak{B}Q + \mathfrak{C}R + \mathfrak{D}S \\ q &= \mathfrak{B}P + \mathfrak{A}Q + \mathfrak{D}R + \mathfrak{C}S \\ r &= \mathfrak{C}P + \mathfrak{D}Q + \mathfrak{A}R + \mathfrak{B}S \\ u &= \mathfrak{D}P + \mathfrak{C}Q + \mathfrak{B}R + \mathfrak{A}S. \end{aligned}$$

Ubi nempe:

$$7)\qquad \mathfrak{A} = \alpha^4 + \alpha^3 - \alpha^2 \qquad \mathfrak{C} = \alpha + \alpha^3 - \alpha^4$$
$$\mathfrak{B} = \alpha + \alpha^2 - \alpha^3 \qquad \mathfrak{D} = \alpha^2 + \alpha^4 - \alpha.$$

Jam ergo si lubet, fac experimentum tuum. In primam (4) impone ex (6) valores p, q, r, u. Sic habebis formam:

$$8)\qquad \mathfrak{M}'P + \mathfrak{M}''Q + \mathfrak{M}'''R + \mathfrak{M}^{IV}S = 0.$$

Litterae $\mathfrak{M}'$... continebunt literas M, C, $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$; pro quibus reponendo suos dictos valores, reperies debite:

$$\mathfrak{M}' = 0;\ \mathfrak{M}'' = 0,\ \mathfrak{M}''' = 0,\ \mathfrak{M}^{IV} = 0.$$

Similiter cum tribus reliquis (4) procede, si lubet. Nec id experimentum valde molestum est.

Et jam ergo contemplare systema mirabile (6); quo nempe omnes radices x, p, q, r, u per meros *quatuor* L expressas habes, (ut Lagrangius statuerat.) — Vides *quatuor* et non plures valores numericos 𝔄, 𝔅, ℭ, 𝔇. Dein jam illorum *translocationes* perlustra. In p et q alternant 𝔄 et 𝔅, et alternant ℭ et 𝔇. In r et u vides jam ℭ, 𝔇 in *priora* loca alternando transmotos, dein et *hic* iterum in r et u alternant ℭ et 𝔇, et alternant 𝔄 et 𝔅. Sic ergo mirus ille *Dualismus* hos L valores ab initio (§. 38) usque ad praesentem finem decisivo modo *comitatur*. Et vidisti simul, alternationum casus possibiles omnino *exhaustos* esse, et restringitur illarum numerus debite ad *quatuor*. Id quod ad radices quatuor p, q, r, u distinguendas praecise *sufficit*. Et intelligis jam igitur, cur natura calculi rem totam expresse per hujusmodi *Alternationes* expediverit. Nam nisi ita fecisset, sane pro nostris 𝔄, 𝔅, ℭ, 𝔇 lamentatio *eadem* oborta fuisset, quae Eulero cum suis $\alpha, \beta, \gamma, \delta$; literas 𝔄, 𝔅, ℭ, 𝔇 nempe admittere translocationes non *quatuor*, sed *viginti* quatuor. Ecce ergo, quam pulchre calculi natura hanc tantam difficultatem ista alternationis lege duali elisit, et numerum casuum ad *quatuor* praecise compescuit.

Et jam porro etiam istos (7) nempe numericos *ipsos* considera. Exspectabis et *hic* absolutum concentum et perfectam symmetriam functionum; et ita est omnino. Nempe si hos ipsos consideras, reperies, combinationes omnes *exhaustas* esse, nec ista, quae in illis viget, lege posse plures casus exhiberi, quam praecise istos *quatuor* (7). Cernis valores hos omnes esse *trimembres*; cernis binos terminos esse positivos, tertium *negativum* semper. Cernis eos constare ex puris et meris dignitatibus α. Porro (quod caput rei est,) agnosces etiam *legem*, quam servant; nempe negativi membri exponens est semper summa amborum *praecedentium* exponentium. Ergo terminus eorum generalis:

$$\alpha^m + \alpha^n - \alpha^{m+n} = K.$$

Et jam ergo explora, quot *casus* existant; reperies valores pro K *quatuor* et non plures, nempe nostros praecise 𝔄, 𝔅, ℭ, 𝔇. Videntur quidem combinationes omnino *sex* velle oriri; nempe pro $\alpha^m + \alpha^n$ habebis casus $\alpha + \alpha^2$ vel $\alpha + \alpha^3$, vel $\alpha + \alpha^4$, vel $\alpha^2 + \alpha^3$ vel $\alpha^2 + \alpha^4$ vel $\alpha^3 + \alpha^4$. At vero casus tertius et quartus efficerent $m + n = 5$, id est orirentur formae:

$$\alpha + \alpha^4 - 1. \qquad \alpha^2 + \alpha^3 - 1.$$

Qui ambo casus *excidunt* igitur, siquidem tota functio puris et meris potestatibus α destinata ponitur. — Incidenter hic observo, quod (6) vi mirabilis istius alternationis reperiatur debite $x + p + q + r + u = 0$; ut facili experimento constat. Reperies enim esse:

$$1 + 𝔄 + 𝔅 + ℭ + 𝔇 = 0.$$

Et sic ergo tota vis cabbalae paucis verbis ob oculos poni potest. Aequatio nempe sursolida reducitur ad *biquadraticam*, cujus coefficientes a gradu *sexto* sed *resolubili* pendent, ita ut ergo biquadratica dicta quatuor et *viginti* valores L praesto sistat. Per has $L^{I} \ldots L^{XXIV}$ ergo deinde ipsae x, p, q, r, u habentur. Et quidem si eae exhiberi debeant secundum ordinationem *potentiarum* $\alpha, \alpha^2, \alpha^3, \alpha^4$, tum eae per valores L *duodecim* data distinctionis lege exhibebuntur. Sin hae x, p, q, r, u per meras *quatuor* L exhibendae sint, tum *nova* radicum α. lex. vel functio concurrit, nempe isti 𝔄, 𝔅, ℭ, 𝔇. — *Lagrangius,* Euleri vestigia premens, ambos hos casus permiscuit et pro uno habuit. Nempe legem potentiarum $\alpha, \alpha^2 \ldots$ persequens, potentias has ad meros *quatuor* valores L applicuit, quorum valorum tamen sciebat *viginti* et quatuor existere. At vero nos vidimus, ad potentiarum $\alpha, \alpha^2, \alpha^3, \alpha^4$ ordinationem requiri valores L *duodecim*; vicissim si *quatuor* tantum valores L admittantur, tum vero lex dicta *potentiarum* desinit.

§. 46.

At vero animum subit, quod ad unam rem (saltim paucis) illustrationem adhuc aliquam subjungere obligemur. — Docuimus nempe, quod propositâ quacunque aequatione (verbi causa sursolidâ) existat positio cabbalistica cyclica $t' = x - \alpha u$ et cetera, cujus ope obtineatur transformata:

1) $$t^5 + Bt^3 - Ct^2 + Dt - E = 0, \text{ (§. 36, Nro. 5.)}$$

quae specialem jam seu *auxiliarem* determinationem habeat *unam*:

$$t' + \alpha t'' + \alpha^2 t''' + \alpha^3 t^{IV} + \alpha^4 t^{V} = 0.$$

Deinde docui, quod haec (1) *porro* positione cyclica $w' = \alpha t' - t''$ et porro reducatur ad *secundam* reductam:

2) $$w^5 + Mw^3 - Nw^2 + Pw - Q = 0, \text{ (ibid. Nro. 5.)}$$

quae auxiliares *duas* possideat, et igitur, ut vidimus, *Moivraea* est. Et hac (2) *denuo* per cabbalam cyclicam $V' = \alpha w' - w'''$ et porro tractatâ, vidimus ibidem perveniri ad bimembrem $V^5 - \Pi = 0$, quae *tres* auxiliares possideat. Et *hi* erant, ut meministi, quoad resolutionis difficultatem isti tres *facilitationis* gradus N', N'', N'''. Nimirum gradus N''' erat *bimembris*, per *se* ergo resolubilis, gradus N'' porro erat casus *Moivraeus*, ut vidimus. Gradum *primum* autem seu N', ad quem nempe auxiliaris *unica* pertinebat, ibi aliquatenus a tergo *imperfectum* dereliqueram et monueram unice sed sine demonstratione, facilitationem N' in *eo* praecise consistere, ut aequatio dependeat a resolvente *cubica* tantum, non *biquadratica*. — Qui quidem casus, *Anonymus* ideo (§. 33) dictus, nunc lacunae instar supplendus est. — In superioribus (loco citato) casum hunc praetextu terribilis *calculi* declinaveram; quoniam ibi rem ad *coefficientium* b, c, d relationem ex data auxiliari emergentem direxeram; quod omnino casu N' insuperabilis calculi est, ut ibi recte monui. Nunc autem problema expediam per solam iteratam *Cabbalam*; quam nempe iterationem loco citato nondum *tradideram*. — Sequitur ergo problema tale, quale ibi inserendum foret, et conclusioni hujus libri cabbalistici apprime aptum, ut videbimus. — Datur $x^5 + bx^3 - cx^2 + dx - y = 0$ sursolida, quae habeat auxiliarem *unam*:

3) $$x + \alpha p + \alpha^2 q + \alpha^3 r + \alpha^4 u = 0.$$

Quaeritur, a quo *resolventis* gradu sursolida talis dependeat. Jam vero ne praeter omnem necessitatem operationes superiores recoquere cogamur, ideo resultationem istarum immediate huc transscribimus. Habemus hic sursolidam cum *una* auxiliari (3). Similiter supra (§. 36, Nro. 3 et 4) habuimus sursolidam:

4) $$t^5 + Bt^3 - Ct^2 + Dt - E = 0, \text{ cum una auxiliari:}$$

5) $$t' + \alpha t'' + \alpha^2 t''' + \alpha^3 t^{IV} + \alpha^4 t^{V} = 0.$$

Intuendo ergo hic (3) et (5) cernis, pro pristinis:

6) $$t' \quad t'' \quad t''' \quad t^{IV} \quad t^{V} \text{ nunc poni:}$$

$$x \quad p \quad q \quad r \quad u.$$

Sic ergo (§. 37, Nro. 1) pro praesenti casu scribendum erit:

7) $$V' = -\alpha(p - \alpha x) + r - \alpha q$$
$$V'' = -\alpha(r - \alpha q) + x - \alpha u$$
$$V''' = -\alpha(x - \alpha u) + q - \alpha p$$
$$V^{IV} = -\alpha(q - \alpha p) + u - \alpha r$$
$$V^{V} = -\alpha(u - \alpha r) + p - \alpha x. \text{ His accedunt:}$$

8) $$x + p + q + r + u = 0.$$

9) $$x + \alpha p + \alpha^2 q + \alpha^3 r + \alpha^4 u = 0. \text{ (Nro. 3.)}$$

Harum ope igitur ex (7) radices *duas* r et u expelles. Ex his (8. 9) ejecto u fit:

10) $$(\alpha^4 - \alpha^3) r = (1 - \alpha^4) x + (\alpha - \alpha^4) p + (\alpha^2 - \alpha^4) q. \text{ Ex (8. 9) ejecto r fit:}$$

11) $$(\alpha^3 - \alpha^4) u = (1 - \alpha^3) x + (\alpha - \alpha^3) p + (\alpha^2 - \alpha^3) q.$$

His (10.11) valoribus r et u jam in istas (7) subrogando fiet:

12) $$V' = \alpha Mx + \alpha^2 p + \alpha^2 Mq \quad \text{Si } M = 1 + \alpha.$$
$$V'' = Mx + \alpha p + \alpha Mq$$
$$V''' = \alpha^4 Mx + p + Mq$$
$$V^{IV} = \alpha^3 Mx + \alpha^4 p + \alpha^4 Mq$$
$$V^{V} = \alpha^2 Mx + \alpha^3 p + \alpha^3 Mq \quad \text{Has ita scribes:}$$

13) $$V' = \alpha[Mx + \alpha p + \alpha Mq]$$
$$V'' = Mx + \alpha p + \alpha Mq$$
$$V''' = \alpha^4[Mx + \alpha p + \alpha Mq]$$
$$V^{IV} = \alpha^3[Mx + \alpha p + \alpha Mq]$$
$$V^{V} = \alpha^2[Mx + \alpha p + \alpha Mq].$$

Et sic ergo ejiciendis ope (8) et (9) *duabus* radicibus r et u, vides effectum prorsus *eundem* esse, qui supra (§. 37, Nro. 3) eliminatione *unius* radicis prodierat. In praecedentibus (13) nimirum est manifesto:

14) $$V' = \alpha V'',\ V^{V} = \alpha^2 V'',\ V^{IV} = \alpha^3 V'',\ V''' = \alpha^4 V'', \text{ id est:}$$

15) $$V^5 - [Mx + \alpha p + \alpha Mq]^5 = 0.$$

Id est (prorsus ut §. 39): 16) $V^5 - L^5 = 0.$

Ponendo ergo promiscue $L = Mx + \alpha p + \alpha Mq$, dispiciendum est, quot L existant. Casu universali (§. 38, Nro. 1) radices *quatuor* x, p, q, r permutandae erant, unde ibi tabula oriebatur ab L' usque ad L^{XXIV}. Praesenti autem casu nonnisi *tres* radices x, p, q permutandae sunt: unde tabula brevior confit:

17) $$L' = Mx + \alpha p + \alpha Mq$$
$$L'' = Mp + \alpha q + \alpha Mx$$
$$L''' = Mq + \alpha x + \alpha Mp$$
$$L^{IV} = Mx + \alpha q + \alpha Mp$$
$$L^{V} = Mp + \alpha x + \alpha Mq$$
$$L^{VI} = Mq + \alpha p + \alpha Mx.$$

Ubi causam factae divisionis in duas cohortes subinde disces. Nam et *haec* tabula (17) secundum naturam suam in duo systemata dirimitur, quemadmodum id (§. 38) in generali tabula vidimus. Et *praesenti* quidem (17) casu nempe habebis:

18) $$L' + L'' + L''' = [M + \alpha M + \alpha][x + p + q]$$
$$L^{IV} + L^{V} + L^{VI} = [M + \alpha M + \alpha][x + p + q]. \quad \text{Ergo:}$$

19) $$L' + L'' + L''' = L^{IV} + L^{V} + L^{VI}.$$

Quae est fundamentalis praesentis casus proprietas. — Eliminando jam radices p, q verbi causa ex tribus primis (17), habebis formam:

20) $$Cx = \mathfrak{A}L' + \mathfrak{B}L'' + \mathfrak{C}L'''.$$

ubi C est numericus valor. Et sic ergo praesenti casu (quo nempe datae sursolidae, aequatio *una auxiliaris* tribuitur,) vi operationis hactenus institutae exhibetur x per *tres* L valores, (et non per quatuor ut casu universali.) — Vel posito communiter $L' = CP$, $L'' = CQ$, $L''' = CR$, erit:

$$x = \mathfrak{A}P + \mathfrak{B}Q + \mathfrak{C}R.$$

Qui casum praesentem penitus pervestigabit, is varia adhuc et venusta inventa subesse cernet. — Nobis Universalem casum enodasse sufficit. Sed qui praesentem rimabitur, is pervidebit, illi omnino longe majores inhaerere difficultates, quam casui Moivraeo, qui nempe *duas* auxiliares habet. Unde

mirum non est, geometras ultra Moivraeum casum adscendere non potuisse; et suspicandum fuit, casum praesentem nonnisi cum casu universali simul resolutum iri. Quod ita nunc factum est. — Quia vides autem, functiones indicis α, quae nempe saepe formam *fractam* mentiuntur, menses Cossistis facturas et impedituras, quo minus debitam formularum speciem nancisci possint; ideo artificium saepe mihi dictum actu tamen exhibebo. Si verbi causa occurrat: $\frac{2+\alpha-\alpha^3}{\alpha+\alpha\alpha}$, tum pone fractionem hanc $= A + B\alpha + C\alpha^2 + D\alpha^3$.

[Membrum $E\alpha^4$ opus nunquam habes, quia illud ob $\alpha^4 = -(1+\alpha+\alpha^2+\alpha^3)$ absorptum supponi potest.] — Ducendo per $\alpha + \alpha^2$, et reducendo habebis:

$$D - 2 + (A-1)\alpha + (A+B)\alpha^2 + (B+C+1)\alpha^3 + (C+D)\alpha^4 = 0.$$

Quoniam hic denuo membrum α^4 prodit, illud repones:

$$(C+D)\alpha^4 = -(C+D)(1+\alpha+\alpha^2+\alpha^3). \quad \text{Sic fit:}$$

$$-2 - C + (A - C - D - 1)\alpha + (A + B - C - D)\alpha^2 + (B - D + 1)\alpha^3 = 0. \quad \text{Breviter:}$$

$$\mathfrak{M}' + \mathfrak{M}''\alpha + \mathfrak{M}'''\alpha^2 + \mathfrak{M}^{IV}\alpha^3 = 0.$$

in qua jam necessario debebit sigillatim esse:

$$\mathfrak{M}' = 0,\ \mathfrak{M}'' = 0,\ \mathfrak{M}''' = 0,\ \mathfrak{M}^{IV} = 0.$$

Sic A, B, C, D facillime habebuntur, et praesenti quidem casu habebis:

$$A = -1,\ B = -2,\ C = -2,\ D = 0. \quad \text{Sic alio quovis casu.}$$

Si pro A, B.... aliquis numerus *fractus* prodit, id indicio est, solutionem nullam existere. In his cossicis res, ut vidisti, succedit *semper*. Praeclarum exemplum vidisti (§. 33, Nro. 34—35).

§. 47.

Et jam dicam tandem, cur (§. 46, Nro. 20) casum specialem trimembris radicis x expresse aliquantum tractaverim. Nimirum si per $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}$... convenientes functiones ex α conflatas intelligimus, universum jam cossae statum his paucis verbis exponimus. — Data *universali* sursolida $x^5 + bx^3 - cx^2 + dx - y = 0$, ejus radix habebit formam *Quadrimembrem*:

$$x = \mathfrak{A}P + \mathfrak{B}Q + \mathfrak{C}R + \mathfrak{D}S.$$

et P, Q, R, S pendebunt a biquadratica. Secundo, si data sursolida auxiliarem *unam* datae cabbalisticae formae habet, radix *Trimembris* erit:

$$x = \mathfrak{A}P + \mathfrak{B}Q + \mathfrak{C}R.$$

et ergo P, Q, R pendebunt a *cubica*. *Tertio*, si data sursolida auxiliares dictas *duas* habet, radix erit Moivraea *Bimembris*:

$$x = \mathfrak{A}P + \mathfrak{B}Q.$$

et P, Q erunt radices ex *Quadratica*. — *Quarto* si data sursolida auxiliares dictas *tres* habeat, radix jam erit *unimembris*:

$$x = \mathfrak{A}P.$$

Et sic ergo tum *Theoriae*, tum etiam humano intellectui (universalem principiorum conspectum sectanti) satisfactum est ope *Cabbalae*, quae dictarum expresse auxiliarium praesentiam in aequationibus resolubilibus docuit, et porro docet, quo pacto aequatio universalis in alias atque alias transformetur, auxiliari una, duabus ... praeditas. Quodsi data aequatio dimensionis m fuerit, transformando progrediendum est ad eam, quae auxiliares m — 2 numero habeat, et quae *bimembris* jam est.

§. 48.

Dolendum est, quod mathematica praeclare inventa saepenumero per hos decem annos oblivioni mandare coactus fuerim, variis de causis. Idem de his Cossicis valet. Detexi verbi causa mirabiles nunc artes, aequationis psevdosextae (§. 43) coefficientes $\pi, \ldots \pi^{x}$ vera nunc exhibendi, superata

nempe [illegible] et omnia succedunt ut sui loco [illegible]. — Similiter mihi theoria est, [illegible] omnes ad aequationes (Moivro dictas) reciprocas revocandi, successu nempe [illegible]. Resolutionis [illegible] hic atque [illegible] spatium [illegible]. Speciminis tamen causa, ut patet, quam augusto [illegible] reciprocas Moivri [illegible], formam talem [illegible] hanc pono:

$$1)\quad z^6 - [3\alpha + 2\alpha^3 + \alpha^5]\,z^5 - [2\alpha^4 + 1 - 3\alpha]\,z^4 + [3\alpha + 4\alpha^3 + 3\alpha^2]\,z^3$$
$$- [\alpha^4 + 2 - 3\alpha^3]\,z^2 - [3 + \alpha + 2\alpha^2]\,z + \alpha^4 = 0.$$

In hac nempe coefficientes positive cossicos *exstinxi*, ita ut sola restet litera α, (radix ex unitate sursolida.) Haec (1) jam non est reciproca, sed pro $\alpha = 1$ demum reciproca fieret. Nec ergo Moivrus illam resoluturus erat. — At vero nunc vide, quo pacto resolvatur tamen. Scribe illam *denuo*, sed posito β pro α. Et in hac nova elige $\beta = \alpha^4$, ut nempe sit $\alpha\beta = 1$. Sic ante oculos erit:

$$2)\quad z^6 - [3\alpha + 2\alpha^2 + \alpha^4]\,z^5 - [2\alpha + 1 - 3\alpha^4]\,z^4 + [3\alpha^4 + 4\alpha^2 + 3\alpha^3]\,z^3$$
$$- [\alpha + 2 - 3\alpha^2]\,z^2 - [3 + \alpha^4 + 2\alpha^3]\,z + \alpha = 0.$$ Harum (1, 2) productum est:

$$3)\quad z^{12} + 3z^{11} + 6z^{10} + 10z^9 + 15z^8 + 18z^7 + 19z^6 + 18z^5$$
$$+ 15z^4 + 10z^3 + 6z^2 + 3z + 1 = 0.$$

Haec jam reciproca est; et per Moivri seu Euleri regulas pendebit ab hac:

$$4)\quad u^6 - 5u^5 \ldots - 25u^3 \ldots - 3u - 1 = 0;$$

radicum $u' \ldots u^{VI}$. Haec (4) jam non mutatur posito $-\frac{1}{u}$ pro u. Id est, ad quamlibet radicem u' conjugatur altera $u'' = -\frac{1}{u'}$. Sic oriuntur hae tres:

$$5)\quad u'u'' + 1 = 0. \quad u'''u^{IV} + 1 = 0. \quad u^{V}u^{VI} + 1 = 0.$$

Et ergo conflabitur (4) ex tribus quadraticis:

$$6)\quad u^2 - k'u - 1 = 0;\ u^2 - k''u - 1 = 0;\ u^2 - k'''u - 1 = 0.$$

Harum sume productum, et sextam emergentem comparando cum (4), habebis:

$$K^3 - 3K^2 + 3K - 31 = 0,$$ radicum k', k'', k'''. Hinc:

$k' = 1 + \lambda\sqrt[3]{30}$, si λ sit radix ex $y^3 - 1 = 0$. Sic ergo (1) resolvitur. — Hoc loco lubet autem comminisci causam, propter quam supra (§. 45, Nro. 7) in aequatione $\alpha^m + \alpha^n - \alpha^{m+n} = K$ valor $m + n = 5$ id est valores ambo $\alpha + \alpha^4 - 1$ et $\alpha^2 + \alpha^3 - 1$ *excepti* manserunt. Manifestum est enim ex natura rei, formulas loco citato pro $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}, \mathfrak{D}$ promiscue pro *quavis* radice $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ valere. Posito verbi causa $\beta = \alpha^2$, $\gamma = \alpha^3$, $\delta = \alpha^4$, dictos valores ita habebis:

$$\mathfrak{A} = \alpha^4 + \alpha^3 - \alpha^2 \qquad \mathfrak{B} = \delta^4 + \delta^3 - \delta^2$$
$$\mathfrak{C} = \beta^4 + \beta^3 - \beta^2 \qquad \mathfrak{D} = \gamma^4 + \gamma^3 - \gamma^2 \qquad \text{M.)}$$

[Hi nempe repositis pro β, γ, δ suis valoribus, rursum in istos (§. 45, Nro. 7) redeunt.] — Intuendo jam in his (M) negativum seu ultimum terminum, ultro patet, hos negativos nunquam fieri $= 1$, sed ad solos valores vel potentias $\alpha, \alpha^2, \alpha^3, \alpha^4$ restrictos esse. — Inseram hoc loco et sequens observatum. Radix cubica est formae $x = P + Q$. Jam si data cubica radices tres *possibiles* habet, membra singula P et Q fiunt *impossibilia*, estque $P = A + B\sqrt{-1}$ et $Q = A - B\sqrt{-1}$, ideoque radix $x = 2A$, nempe *possibilis*. Hunc casum schola itala *irreducibilem* dixit. Sursolida jam porro radices possibiles vel *unam* vel *tres* vel *quinque* habet, repraesentans *triplicem* quasi casus irreducibilis categoriam. Forma radicis est quadrimembris $x = P + Q + R + S$. Quodsi jam radices omnes quinque *possibiles* fuerint, singulos P, Q, R, S fieri *impossibiles* puta. At vero satis erit, eorum *binos*, verbi causa P et Q sibi respondere, et similiter binos R et S. Id est, ponendus erit casus *duplex:*

$$P = A + B\sqrt{-1} \qquad R = C + D\sqrt{-1}$$
$$Q = A - B\sqrt{-1} \qquad S = C - D\sqrt{-1}$$

et ita fiet radix $x = 2(A + C)$, *possibilis*. — Sed ad rem redeo.

§. 49.

Decrevi enim, theoriae supra (§. 19) exhibitae plenius simplicem adfundere, et ejusdem consensum cum praecedente theoria *Cabbalae* demonstrare. — Loco citato aequationem $x^5 = ax + b$ reduxi ad formam $\mathfrak{A}Q^5 + \mathfrak{C}Q^3 + \mathfrak{D}Q^2 + \mathfrak{E} = 0$, in qua nempe posito $\mathfrak{B} = 0$ dedi resolventem biquadraticam, ut ibi vidimus. Et vero in *residuae* pro $\mathfrak{B} = 0$ aequationis resolutione haerere me indolui. Operae pretium tamen est, (ne quid labori nostro desit) cum $\mathfrak{B} = 0$ seu resolventem biquadraticam exhibere pro *completa* quoque forma:

$$x^5 + bx^3 - cx^2 + dx - y = 0 \qquad 1)$$

siquidem resolvens haec $\mathfrak{B} = 0$, omnium biquadraticarum resolventium, quae adhiberi in hoc negotio possunt, absolute *simplicissimam* [illegible] indolem habebit. Dummodo artificium *residuam* dictam resolvendi, aliquando forte detectum fuerit. — Pro completa ergo sursolida fit:

$$\frac{x^5 + bx^3 - cx^2 + dx - y}{x^2 - mx + P} = \frac{0}{0}, \text{ vel } \frac{[illegible]}{[illegible]} = P.$$

Haec ultima, si ponis $m = 2n$ et $P = \frac{Q}{[illegible]}$ formam subit:

$$5x^4 + 3bx^2 - (Q + 2c)x + d + nQ = 0. \text{ Ex hoc et (1) ejecto } x \text{ fit:}$$

$$[illegible] = 0.$$

Ego vero (cum rem hanc non persequar) non molem totam adscribo, sed solam resolventem $\mathfrak{B} = 0$ biquadraticam, quae sic habet:

$$[illegible]\,n^3[bd + gc]\,n^2 [illegible] + [gcd - 5by]\,n [illegible] - bd - 5cy [illegible] = 0.$$

Quae omnibus titulis admirabilis omnino est. — At vero quo simplicior est biquadratica *resolvens*, eo intricatior est jam *Residua* aequatio; atque *prorsus* huc valet et relegendum est, quod supra (§. 20 fin.) posui. — Ceterum quia molestae *eliminationes* in hoc negotio occurrunt, immensum compendium praesto est, si non molem totam (2), sed sigillatim singulas valores $\mathfrak{B} = 0$ quaeratur. Velut (casus pro $x^3 = ax + b$) radicum non quaeres totalem $\mathfrak{A}Q^3 + \mathfrak{B}Q^2 + \mathfrak{C} = 0$, sed [illegible] $\mathfrak{B} = 0$ seu [illegible] seorsim solam. Haec enim supponit $Q' + Q'' + Q''' = 0$ id est (§. 17):

$$\frac{3x^2 - a}{x - n} + \frac{3p^2 - a}{p - n} + \frac{3q^2 - a}{q - n} = 0. \qquad M.)$$

Hanc a fractionibus liberando et symmetricas dein radicum x, p, q functiones reducendo habebis aequationem (ut loco citato) resolventem $\mathfrak{B} = 0$ seu $3an^2 + 9bn + aa = 0$. Eundem processum jam de quovis altiori *casu* seu *coefficiente* intelliges. — Ceterum praecedens (N), exstat jam vera et omnium simplicissima resolvens biquadratica aequationis $x^5 + bx^3 - cx^2 + dx - y = 0$; quamquam enim residuae aequationis resolutio (humani ingenii labe vel mea saltim culpa) *nondum* in potestate est, id quidem dictae resolventi nihil detrahit. Ea enim, postquam se *ipsam* inveniri passa est, expectat nunc, dum et *residua* aequatio debellari se et resolvi passa fuerit. —

At vero nunc misso casu $\mathfrak{B} = 0$ simplici, lectores mecum ad *generalem* casum transeant, quo nempe intermedii *omnes* evanescunt, $\mathfrak{B} = 0$, $\mathfrak{C} = 0, \ldots$ et mera *bimembris* $\mathfrak{A}Q^m + \mathfrak{M} = 0$ relinquitur. Et examinemus nempe per *praesentem* theoriam, quaenam absolute functio $Q = F[x, p, q \ldots]$ requiratur, ut proposita aequatio ad formam dictam *bimembrem* reducatur. — Sit cubica $x^3 = ax + b$. Ea reducitur, ut scimus, ad formam $\mathfrak{A}Q^3 + \mathfrak{B}Q^2 + \mathfrak{C} = 0$, in qua (ob simplicitatem hujus casus) unus $\mathfrak{B} = 0$ ponendus occurrit. Oritur ergo bimembris $\mathfrak{A}Q^3 + \mathfrak{C} = 0$. Et loco Q', Q'', Q''' habetur ergo:

$$Q', \alpha Q', \alpha^2 Q'. \quad \text{(Ubi } \alpha \text{ ad } t^3 - 1 = 0 \text{ valet.)}$$

Habentur ergo hae tres aequationes:

$$3)\quad Q' = \frac{3x^2-a}{x-n},\quad \alpha Q' = \frac{3p^2-a}{p-n},\quad \alpha^2 Q' = \frac{3q^2-a}{q-n}.$$

Hic ex duabus (v. e. ex ambabus primis) ejecto n fit:

$$4)\quad \alpha[x-p]Q = [1-\alpha]a + 3\alpha x^2 - 3p^2$$

Sed ex $x+p+q=0$ et $xp+xq+pq=-a$ ejecto q fit:
$a = x^2+px+p^2$. Eo valore in (4) imposito, ob $1+2\alpha = \alpha-\alpha^2$ et $2+\alpha = 1-\alpha^2$ fiet:

$$5)\quad \alpha[x-p]Q = [1-\alpha][\alpha x^2-(1+\alpha)p^2+px].$$

Nunc pone $Q = (1-\alpha)L$ et $\alpha\alpha$ pro $-(1+\alpha)$, fiet:

$$\alpha(x-p)L = \alpha x^2 + \alpha\alpha p^2 + px,\ \text{id est}$$

$$\alpha(x-p)L = \alpha(x-p)(x-\alpha p)\ \text{vel:}$$

$$6)\quad L = x-\alpha p;\ \text{nempe } \textit{Cabbala!}$$

Et *haec* ergo est functio pro L vel Q, si fieri debet $\mathfrak{B}=0$, id est, si transformatio cubicae in *bimembrem* desideratur. — Ceterum si functio (6) scribatur indeterminate $L = \mathfrak{M}x + \mathfrak{N}p$, theodisci valores $\mathfrak{M}, \mathfrak{N}$ meras functiones ex α conflatas, et ab radicibus x, p *independentes* designant. Et quidem heic $\mathfrak{M}=1$ $\mathfrak{N}=-\alpha$. Et erunt nempe hi $\mathfrak{M}, \mathfrak{N}$ prorsus *iidem* pro quavis *alia* proposita $x^3 = ax+b$. Sic fit ergo, ut singuli per se *seorsim* determinari possint. In praecedentibus nempe si posuissem $p=0$, prodiisset separate $L=\mathfrak{M}x$. Contra si posuissem $x=0$, prodiisset separate $L=\mathfrak{N}p$. Unde conjunctim seu pro totali fuisset $L=\mathfrak{M}x+\mathfrak{N}p$, nempe $\mathfrak{M}=1$ et $\mathfrak{N}=-\alpha$, ut supra. — Hoc artificium, ad praesentem casum leve, sursolido tamen casu a mira calculi mole liberabit. — *Nota.* Pro completa sursolida jam sequitur:

$$\frac{x^5+bx^3-cx^2+dx-y}{x^4+mx^3+nx^2+hx+f} = \frac{0}{0}\ \text{ergo}\qquad 7)\quad \frac{5x^4+3bx^2-2cx+d}{4x^3+3mx^2+2nx+h} = P.$$

Hic enim, ut parte prima hujus libri vidimus, denominatore altissimo seu biquadratico opus est; siquidem non unicam $\mathfrak{B}=0$, sed imo residuam *bimembrem* intendimus. At vero patet, in divisore (7) numeros 4, 3, 2 ex differentiatione ortos, nihil prorsus ad rem facere. Pro incognitis 3m, 2n, h enim ponemus respective 4m, 4n, 4h, et porro jam $P = \frac{Q}{4}$. Sic ista (7) debitam formam simpliciorem accipit:

$$8)\quad \frac{5x^4+3bx^2-2cx+d}{x^3+mx^2+nx+h} = Q.$$

Et sub *hac* ergo forma rem considerabo; quod semel hoc loco dictum esto. Isti 4, 3, 2 numeri enim superflua sarcina forent.

§. 50.

Jam ergo ad arduum sed excellentissimum problema transeo. — Datur $x^5+bx^3-cx^2+dx-y=0$, et datur praecedens (§. 49, Nro. 8); ejecto x ex ambabus prodit:

$$1)\quad \mathfrak{A}Q^5+\mathfrak{B}Q^4+\mathfrak{C}Q^3+\mathfrak{D}Q^2+\mathfrak{E}=0.$$

Quaeritur ea praecise functio $Q=f(x,p,q,r,u)$, quae efficiat $\mathfrak{B}=0$, $\mathfrak{C}=0$, $\mathfrak{D}=0$, id est quae *bimembrem* (1) producat. Nancisci ergo debet haec (1) loco radicum:

$$Q'\quad Q''\quad Q'''\quad Q^{IV}\quad Q^{V}$$

$$\text{radices}\quad Q',\ \alpha Q',\ \alpha^2 Q',\ \alpha^3 Q',\ \alpha^4 Q'.$$

(posito nempe, α pertinere ad $t^5-1=0$.) — Habentur ergo aequationes quinque:

2) $$Q'=\frac{5x^4+3bx^2-2cx+d}{x^3+mx^2+nx+h}. \qquad \alpha Q'=\frac{5p^4+3bp^2-2cp+d}{p^3+mp^2+np+h}.$$

$$\alpha^2 Q'=\frac{5q^4+3bq^2-2cq+d}{q^3+mq^2+nq+h}. \qquad \alpha^3 Q'=\frac{5r^4+3br^2-2cr+d}{r^3+mr^2+nr+h}.$$

$$\alpha^4 Q'=\frac{5u^4+3bu^2-2cu+d}{u^3+mu^2+nu+h}.$$

Attente nunc jucundum problematis hujus successum perlustra. — Eliminandae incognitae occurrunt hic *tres*, m, n, h. Ad quas eliminandas ergo adhibendae sunt *quatuor* ex istis quinque (2) aequationibus; id est omnes demta *una*. Adhibebo ergo (2) quatuor primas. — Jam pone:

3) $$x^3+mx^2+nx+h=F. \qquad p^3+mp^2+np+h=G$$
$$q^3+mq^2+nq+h=H \qquad r^3+mr^2+nr+h=K.$$

Ex (3) pone valorem h in tres reliquas. Fiet:

4) $$p^3-x^3+m[p^2-x^2]+n[p-x]=G-F.$$
$$q^3-x^3+m[q^2-x^2]+n[q-x]=H-F.$$
$$r^3-x^3+m[r^2-x^2]+n[r-x]=K-F.$$

Pone nunc n ex (4) in ambas ultimas, et ex resultantibus duabus eliminetur denique m quoque. Fiet:

5) $$G[q-x][r-x][q-r]+K[p-x][q-x][p-q]+$$
$$H[p-x][r-x][r-p]+F[p-r][q-r][q-p]=$$
$$[p-x][q-r][p-r][p-q][r-x][q-x].$$

Jam ergo istae m, n, h eliminatae sunt; id est, difficultas a denominatoribus (2) orienda e medio sublata est. Ponatur jam:

6) $$\frac{A}{Q}=F, \quad \frac{B}{Q}=G, \quad \frac{C}{Q}=H, \quad \frac{D}{Q}=K.$$

His pro F, G, H, K valoribus in istam (5) subrogatis fit:

7) $$A[p-r][q-r][q-p]+B[q-x][r-x][q-r]+$$
$$C[p-x][r-x][r-p]+D[p-x][q-x][p-q]=$$
$$Q[p-x][q-r][p-r][p-q][r-x][q-x].$$

Pone in (6) pro F, G, H, K suos veros valores, nempe istos (3), et compara ordine singulas prodeuntes cum primis quatuor (2) exstantibus. Patebit esse:

8) $$A=5x^4+3bx^2-2cx+d \qquad \alpha^2 C=5q^4+3bq^2-2cq+d$$
$$\alpha B=5p^4+3bp^2-2cp+d \qquad \alpha^3 D=5r^4+3br^2-2cr+d$$

Quibus in istam (7) subrogatis habebitur quaesita functio seu relatio inter Q et x, p, q, r; sed sub inutili et perplexa forma, et id ob literas b, c, d praesentes, quae nempe (mediantibus b = xp … et c = xpq … et d = xpqr …) *eliminandae* adhuc restant. Hoc titulo igitur terribiles omnino calculi promittuntur; quos autem prudenter antevertam. Ceterum si quis imo vero (7) literas A, B, C, D dicto modo *sine* b, c, d expressisset, et molem calculi emergentem debite ordinasset, tum demum *novus* ingens instaret labor. Nempe dicta aequatio (7) deinde *dividenda* esit per omnes factores post Q ibi adnexos, donec tandem loco hujus (7) restaret forma debita linearis:

$$\mathfrak{M}x+\mathfrak{N}p+\mathfrak{O}q+\mathfrak{P}r=Q.$$

In quas prolixitates igitur ne praeter omnem necessitatem incurramus, artificium (§. 49) dictum adhibere juvat, calculum nempe instituendo pro r = o, id est quaerendo interim *trimembrem*:

9) $$Q=\mathfrak{M}x+\mathfrak{N}p+\mathfrak{O}q:$$

Quare nunc omnia ad casum r = o componenda sunt. Primo in valoribus b = xp … et c = xpq … et d = xpqr … fiat r = o. In remanentibus ejice radicem u = − x − p − q. Sic fiet:

10) $b = -x^2 - p^2 - q^2 - xp - xq - pq$

$c = -x^2p - xp^2 - x^2q - xq^2 - p^2q - pq^2 - 2xpq$

$d = -xpq[x + p + q]$.

Jam porro in (7) pone item $r = o$, et repone pro Q suum quaesitum valorem (9). Sic fit:

11) $$Apq(q-p) + Bxq(x-q) + Cxp(p-x) + D(p-x)(q-x)(p-q) =$$
$$xpq(p-x)(q-x)(q-p)(\mathfrak{M}x + \mathfrak{N}p + \mathfrak{O}q).$$

Valores A, B, C (Nro. 8) immutati manent, nisi quod pro quarto ibi fit $\alpha^5 D = d$. Hanc (11) duc per α^5. Et eadem pro A, B, C repone dictos valores (8), pro $\alpha^5 D$ autem pone d. Inde haec (11) induet formam:

12) $$5xpq[\alpha^3x^3(q-p) + \alpha^2p^3(x-q) + \alpha q^3(p-x)]$$
$$+ 3bxpq[\alpha^3x(q-p) + \alpha^2p(x-q) + \alpha q(p-x)]$$
$$+ 2cxpq[\alpha^3(q-p) + \alpha^2(x-q) + \alpha(p-x)] +$$
$$d[\alpha^3pq(q-p) + \alpha^2qx(x-q) + \alpha xp(p-x) + (p-x)(q-x)(p-q)]$$
$$= \alpha^5xpq(p-x)(q-x)(q-p)[\mathfrak{M}x + \mathfrak{N}p + \mathfrak{O}q].$$

Jam vero (in ipso jucundissimo fine) aliquid modici *calculi* opus est; nempe valores b, c, d ex (10) in istam (12) subrogando. Obtinetur:

13) $$(\alpha^5 + 2\alpha^4 - 3\alpha)x^3q + (\alpha^4 - \alpha^5)x^3p + (\alpha^2 - \alpha^4)p^3x + (\alpha^4 - \alpha)p^3q$$
$$+ (\alpha^3 - \alpha^2)x^2p^2 + (3\alpha^4 - \alpha^5 - 2\alpha)x^2q^2 + (\alpha^2 - \alpha)p^2q^2 + (\alpha - \alpha^4)q^3p + 4(\alpha^4 - \alpha)q^3x +$$
$$(3\alpha^4 + \alpha^2 - 4\alpha)x^2pq + (3\alpha^4 - \alpha^5 - 2\alpha)p^2xq + (3\alpha^4 + \alpha^5 - \alpha^2 - 3\alpha)q^2xp$$
$$= \alpha^5(p-x)(q-x)(q-p)[\mathfrak{M}x + \mathfrak{N}p + \mathfrak{O}q].$$

At vero ne *nunc* quidem superiorem aequationis partem sine molestia per factores inferioris partis, (qui sunt numero tres adhuc,) diviseris. Sed et minime *opus* est. Quaeramus nempe primum solos $\mathfrak{N}, \mathfrak{O}$, ponendo $x = o$. Sic nostra (13), si insuper per α^2 ducatur, formam induit:

$$(\alpha - \alpha^4)p^2 + (\alpha^5 - \alpha)q^2 + (\alpha^4 - \alpha^5)pq = -\mathfrak{N}p^2 + \mathfrak{O}q^2 + (\mathfrak{N} - \mathfrak{O})pq.$$

Ergo comparando fit $\mathfrak{N} = \alpha^4 - \alpha$, et $\mathfrak{O} = \alpha^5 - \alpha$. Porro in (13) pone $q = o$, tum aequatio (denuo per α^2 ducta) comparatione effert $\mathfrak{M} = 1 - \alpha$, $\mathfrak{N} = \alpha^4 - \alpha$. Sic ergo $\mathfrak{M}, \mathfrak{N}, \mathfrak{O}$ inventi sunt. —

Et jam autem praesentem calculum, (quem a Nro. 9 inde pro $r = o$ adornavi,) adorna loco evanescentis r pro *alia* radice verbi causa pro $x = o$, (eandem rem autem ego non repeto,) ut nempe valeat ad trimembrem $Q = \mathfrak{N}p + \mathfrak{O}q + \mathfrak{P}r$. Reperies:

$$\mathfrak{N} = \alpha^4 - \alpha, \quad \mathfrak{O} = \alpha^3 - \alpha, \quad \mathfrak{P} = \alpha^2 - \alpha.$$ Sic habetur *completa*:

$$Q = \mathfrak{M}x + \mathfrak{N}p + \mathfrak{O}q + \mathfrak{P}r.$$ Nempe:

14) $Q = (1 - \alpha)x + (\alpha^4 - \alpha)p + (\alpha^3 - \alpha)q + (\alpha^2 - \alpha)r$. Vel (si $M = 1 + \alpha$):

15) $Q = (1 - \alpha)\alpha^5x + \alpha^4(1 - \alpha)Mp - \alpha(1 - \alpha)Mq - \alpha(1 - \alpha)r$.

(Compara enim (15) et (14) et consentient;) tandem pone $Q = \alpha(1 - \alpha)L$, et (15) fiet:

16) $L = \alpha^3Mp - r + \alpha^4x - Mq$.

Nempe *Cabbala*. Et quidem fortuito L^{XV} (§. 38), pro electione a nobis adhibita initio hujus paragraphi; siquidem ibi (Nro. 2) pro prima aequatione fixa, potentiae $\alpha, \alpha^2, \alpha^3, \alpha^4$ quater et *vicies* ad reliquas quatuor aequationes ad lubitum ordinari possunt. Unde ergo promiscue nostri $L' \ldots L^{XXIV}$ oriuntur. — Et sic ergo ex praesenti theoria demonstratum dedimus, quod ad sursolidam in habitum bimembrem $\mathfrak{A}Q^5 + \mathfrak{E} = o$ revocandam, mediatrix aequatio seu functio linearis (16) et non alia requiratur vel existat. Rem quidem eandem *supra* jam ex ipso fonte demonstravimus, sed quid, si cabbalae theoria *deesset* adhuc? Ceterum rem non ultra persequar. Quum enim negotium omne ad formulam (16) revocatum sit, reliqua omnia prorsus ut supra consequuntur. Possent autem, quae supra eliciumus, omnino directe etiam ex *praesenti* theoria deduci; sed id singularem tractationem posceret, nec est

hujus instituti; imo vero editi praesentis hujus scripti, diversis titulis quasi poenitet. — Ceterum supra (Nro. 2) vidimus, (quod pro quovis altiori casu valet,) praesto esse *quinque* aequationes ad eliminandas *tres* incognitas m, n, h; id est unam praecise aequationem ad id eliminationis negotium vacare et superfluam esse. Nos quintam seu ultimam seposuimus. — Potest autem res ita instrui, ut ad eliminationem dictam *omnes* quinque aequationes (nulla nempe demta) in consensum vocentur. Sic prodiret *completa* functio (§. 37, Nro 2), nempe *omnes* quinque radices x, p, q, r, u in se continens. Quae completa dein per $u = -(x+p+q+r)$ ad formam (16) revocatur, ut vidimus. Quare hoc loco observatio longe gravioris addenda est. Cum enim theoria praesens ipso facto doceat, ad eliminandas tres m, n, h e quatuor aequationibus *quatuor* tantum (Nro. 2), ideo quaesita functio, prodiens $Q = f(x, p \ldots)$ exhibebitur (ut vidimus) per *quatuor* tantum radices x, p, q, r; seclusa nempe quinta u. Vice versa ergo si dicta functio *completa* exhibeatur, (per omnes *quinque* radices x, p ,.. nempe expressa,) tum ergo una aliqua radix u mere *apparenter* inest, et omnino superflua est et quasi *ferias* agit. Et sic ergo patet vera causa quasi metaphysica, cur supra in theoria cabbalae, (quum functiones radicum x, p, q, r symmetricas per quintam radicem u exprimerem,) haec quinta u jam sponte ex calculo rursum abire et *exulare* deprehensa fuerit. Nempe si in cabbalae theoria pro dignitatibus $L^5 \ldots L^5$ (I. ... XXIV) scriptionem dictam *completam* adhibuissem, singula talis dignitas in se continuisset quidem *omnes* quinque radices x, p, q, r, u, sed unam (ut vidimus) *apparenter* tantum.

§. 51.

In eorum gratiam autem, qui *praesentem* (§. 50) theoriam ultra perficere, id est ad sextum gradum resolubilem revocare moliantur, unicam observationem addam. Si sursolida data ad bimembrem reducenda est, requiritur $\mathfrak{B}=0$, $\mathfrak{C}=0$, $\mathfrak{D}=0$. Et incognitae m, n, h in $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$, adscendent respective ad 4, 3, 2 dimensiones. Unde pro singula incognita verbi causa m, res eliminandis ambabus reliquis n, h deducitur ad gradum $2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$. Quam vero aequationem $m^{24} - Am^{23} + \ldots = 0$ nemo quisquam eliminando neque in *medio* sistet, ob laborem herculeum, neque (si vel in medio *foret*,) ex tanta mole et tam intricata principium resolubilitatis facile quis extricaturus foret. Quod ultimum tamen *unice* intenditur. Quare declinanda est illa, quam dixi eliminatio; et eliminatione pro literis n, h *lineari* tantum utendum. — Id quod (quum extra scopum sit,) brevissimo saltim exemplo indigitabo. Sit $x^4 = ax + b$, ergo $\frac{x^4 - ax - b}{x^3 + mx^2 + nx + h} = \frac{0}{0}$. Ergo (comissis nempe in denominatore numeris absolutis, ut supra dixi,) differentiando fit:

$$\frac{4x^3 - a}{x^2 + mx + n} = Q. \text{ Ex hac et } x^4 = ax + b \text{ ejecto x fit:}$$

$$1) \qquad \mathfrak{A}Q^4 + \mathfrak{B}Q^3 + \mathfrak{C}Q^2 + \mathfrak{D} = 0.$$

quae per positiones $\mathfrak{B}=0$, $\mathfrak{C}=0$ fit bimembris. In positione $\mathfrak{B}=0$ incognitae m, n adscendunt mixte ad *tertiam*, in $\mathfrak{C}=0$ ad *secundam* dimensionem. Eliminatio ergo alterius utrius n daret aequationem pro sola m; quae aequatio stricte loquendo erit *sexti* gradus. At haec eliminatio praecise est id, quod evitandum est, ut dixi; eliminationem nempe mere *linearem* subrogando. — Radices istius (1) ponantur Q', Q'', Q''', Q^{IV}. Pro $\mathfrak{B}=0$, $\mathfrak{C}=0$ id est pro bimembri $\mathfrak{A}Q^4 + \mathfrak{D} = 0$, radices hae ita habebunt:

$$Q'' = -Q'; \quad Q''' = Q\sqrt{-1}; \quad Q^{IV} = -Q\sqrt{-1}.$$

$$\text{Ergo } Q' + Q'' = 0; \quad Q''' + Q^{IV} = 0. \text{ Scribes ergo:}$$

$$\frac{4x^3 - a}{x^2 + mx + n} + \frac{4p^3 - a}{p^2 + mp + n} = 0; \quad \frac{4q^3 - a}{q^2 + mq + n} + \frac{4r^3 - a}{r^2 + mr + n} = 0.$$

Utramque hanc a fractionibus liberando, reperies hujus respective formae esse:

2) $$m. F(x,p) + F'(x,p) = n. F''(x,p).$$

3) $$m. F(q,r) + F'(q,r) = n. F''(q,r).$$

Nempe quae in (2) functiones radicum x, p occurrunt, eaedem in (3) functiones reliquarum q, r coram sunt. Et jam ergo lineari eliminatione ejecto n prodit:

4) $$m = \frac{F'(q,r).\ F''(x,p) - F''(q,r).\ F'(x,p)}{F''(q,r).\ F(x,p) - F(q,r).\ F''(x,p)}.$$

In hac si literae (q, r) cum literis (x, p) invicem locos permutent, videbis, nullam inde mutationem gigni, et valor m prorsus *idem* persistet. Et jam ergo dispice, quot combinationes tales binarum radicum dentur. Invenies *tres* et non plures:

[q, r] cum [x, p]   [p, r] cum [x, q]   [p, q] cum [x, r].

(Quarum primam ista (4) exhibet.) Ergo aequatio pro m adscendit ad gradum *cubicum*, et non altiorem. Sed hac levi indigitatione acquiesco. — Quaeri autem porro potest, quanam operatione praesens theoria ad aequationes mihi dictas *relationales* perducat; quam rem item brevi indigitabimus. Sit verbi causa $x^3 = ax + b$. Ergo respectu transformatae $\mathfrak{A}Q^3 + \mathfrak{B}Q^2 + \mathfrak{C} = 0$ habetur (§. 49, M) una $Q' = \frac{3x^2 - a}{x - n}$. Et similes Q'', Q''', ut loco citato patet. Jam vero positio $\mathfrak{B} = 0$ aequationem resolventem praebet:

5) $$3an^2 + 9bn + aa = 0. \quad (§. 17.)$$

Ergo radices duae exstant n', n''. Et praecedens aequatio igitur pro Q' *duos* casus involvit:

6) $$Q = \frac{3x^2 - a}{x - n'} \qquad Q = \frac{3x^2 - a}{x - n''}.$$

Ex his formabis quadraticam; in qua valorem $n' + n''$ et $n'n''$ ex (5) habes. Fiet:

7) $$Q^2 - \frac{3[9bx^2 + 4a^2x + 3ab]}{3ax^2 + 9bx + aa} Q + \frac{3a[3x^2 - a]^2}{3ax^2 + 9bx + aa} = 0.$$

Quae est ergo quaesita inter Q et x *relatio*; et *fontem* igitur hujus rei nunc indicavimus. Ceterum ut forma consueta prodeat, in istam (7) valor $b = x^3 - ax$ introducendus est. Sic fit:

$$Q^2 - 3xQ + 3a = 0 \text{ vel (si } Q = 3u) \ u^2 - xu + \frac{a}{3} = 0.$$

nempe Relationalis, toties mihi dicta. — Qui autem praesentem theoriam porro perficere molitur, is reliquas operationes, quae locum habent, sponte pervidebit. Videbit (§. 50, Nro. 2), literam Q ex prima ibi aequatione in quatuor sequentes posse subrogari. Sic oriuntur quatuor novae aequationes, ex quibus valor Q abest. In his quatuor novis, (quarum una continebit simplicem potentiam *a*,) hanc simplicem in reliquas aequationes subrogabit, et orientur *denuo* tres novae aequationes, ex quibus jam litera *a* quoque abest. Sic omnia calculi hujus elementa verbo saltim dixi. —

§. 52.

Quum forma radicum x, p, q, r, u, ex tabula (§. 45, Nro. 6) constet, ergo jam *inversa* quoque operatio iniri potest, nempe ibi omnium quinque radicum *productum* sumendo, id est sursolidam ex illis conflando, quae jam cum data $x^5 + bx^3 - cx^2 + dx - y = 0$ debet coincidere. Calculus ipse autem, (si nempe per hanc operationem valores P, Q, R, S determinare moliaris,) aeque immensus fit, ac is, quo in cabbalae theoria supra laboratum fuit; et imo prorsus *eaedem* functiones et eaedem pseudo — *sextae* conspiciuntur, nisi hoc solo discrimine, quod supra functiones radicum x, p, q, r symmetricae per *quintam* u exprimendae fuerunt, quae quinta dein sponte ex calculo rursum *exulabat*. In *praesenti* re autem immediate cum quatuor incognitis P, Q, R, S, et non pluribus negotium est. — Cete-

rum in cabbalae theoria tractanda viderunt lectores, me a cabbala prima exorsum, subinde ad secundam, et ab hac indesinenter ad tertiam cum *tribus* auxiliaribus, id est ad formam reductionis *bimembrem* descendisse. Patet autem, quod omnino in cabbala *secunda* cum *duabus* nempe auxiliaribus potuissem subsistere, quae propositam sursolidam in *hanc* formam (*Moivraeam* nempe) reducit:

a) $W^5 - 5PW^3 + 5P^2W = Q$ (§. 36, Nro. 5; conf. §. 33, Nro. 36.)

Haec Moivraea enim quum *aeque* resolubilis ac bimembris $L^5 - \Pi = 0$ existat, ideo valde operae pretium foret, ut quis eum casum peculiari tractatione persequatur, et nimirum incognitas P et Q ab *sexta resolubili* pendere demonstret. Quemadmodum enim casu bimembri *unus* valor Π inveniendus (vel saltim ad resolubiles aequationes revocandus) erat, sic in praecedenti (1) incognitae *duo* P et Q in dictum sensum resolvendae proponuntur. — Deinde si quis ingeniosus Oedipus fuerit, is imo in cabbala *prima* (nempe auxiliarem *unam* possidente) subsistet (§. 35, Nro. 1), cujus reliqua mysteria mihi (indesinenter ad cabbalam tertiam seu bimembrem $L^5 - \Pi = 0$ festinanti) silentio praetermittenda fuere. Demonstravi tamen, istius primae cabbalisticae coëfficientes λ''... item a *sexta* dependere.

§. 53.

In decursu totius theoriae cabbalisticae (§. 37, seqq.) lectores viderunt, aequationis $x^5 + bx^3 - cx^2 + dx - y = 0$ resolutionem indispensabili modo perducere ad aequationem gradus $1.2.3.4.5 = 120$. Nempe bimembris erat $L^5 - \Pi = 0$; et pro L habuimus valores quatuor et *viginti*, nempe istos L'... L^{XXIV}. Sic ergo bimembres factores viginti quatuor $L^5 - \Pi' = 0$ et porro, formabunt rationalem $L^{120} - \mathfrak{A}'L^{115} + \ldots = 0$, quae resolvitur in sex biquadraticas:

1) $L^{20} - \mathfrak{M}L^{15} + \mathfrak{N}L^{10} - \mathfrak{O}L^5 + \mathfrak{P} = 0$ (§. 39, Nro. 1 et A, B.)

In hac (1) nempe coefficientes a *sexta* pendent, et conjugabuntur nempe $\mathfrak{M}', \mathfrak{N}', \mathfrak{O}', \mathfrak{P}'$, et porro; usque ad $\mathfrak{M}^{VI}$, $\mathfrak{N}^{VI}$, $\mathfrak{O}^{VI}$, $\mathfrak{P}^{VI}$. Et sic ergo *sex* tales biquadraticae (1) oriuntur. — Totum ergo mysterium sursolidam resolvendi eo nititur, ut manuducentibus operationibus cabbalae ad veram et *genuinam* et *resolubilem* pro litera $\mathfrak{M}$ sextam pervenirem, et resolubilitatem sextae hujus (§. 43) ipso facto demonstrarem. Et id a me praestitum est, quum suis locis ipso facto demonstrarem, esse $\varphi = \psi$. Unde mire operae pretium videtur, adumbrare veram causam (ut ita loquar) *metaphysicam* resolubilitatis hujus; et id ita nunc fiet igitur, brevi indigitatione saltim. — Intuere (§. 40, Nro. 7) sextae nostrae radicem primam $\mathfrak{M}'$. Conflatur ea (excepto termino primo) ex radicum x, p, q, r functionibus *non*-symmetricis. Verbi causa terminus singulus P' manifesto *mancus* est quoad symmetriam, terminus P'' *item* mancus et P''' *item*. Atque demum in *summam* collecti $P' + P'' + P'''$, perfectam radicum x, p, q, r symmetriam constituunt. (Idem de ceteris ternis Q', Q'', Q''' et porro ante oculos est; at ego rem titulo solorum P', P'', P''' illustrabo.) Attende nunc ad *indolem* horum trium, secundum quam conflantur. Terminus verbi causa P' pro basi vel stamine agnoscit functionem $pr + qx$. Quae tantum *bimembris* quidem est, sed accedentibus *exponentibus* manifesto *quadrimembris* fit:

$p^n r^m + r^n p^m + q^n x^m + x^n q^m$ (§. 40, Nro. 7 et 8.)

Nimirum pone $m = 3$, $n = 4$, et habebis membrum P'. Similiter cum istis P'', P''' habet. Considera nunc (ut revera est) hos P', P'', P''' pro terminis *incognitis*. Et habet ergo categoria haec incognitas *tres* et non plures. At vero hae tres connexae sunt (ut loco citato patet,) cum theodiscis coefficientibus numericis $\mathfrak{B}', \mathfrak{B}'', \mathfrak{B}'''$. Verbi causa dislocatio una talis est:

2) $\mathfrak{B}'P' + \mathfrak{B}''P'' + \mathfrak{B}'''P''' = \Delta$.

Harum dislocationum autem existunt numero *sex*; et quum incognitarum insint nonnisi *tres*, ex mera hac dislocatione seu combinatione oriuntur omnino valores diversi *sex*, Δ'... Δ^{VI}. Et ex hoc *ipso* fonte praecise nostra pseudosexta pro $\mathfrak{M}$ aequatio *originem* unice duxit, et nempe cernis in radicibus ibi

nostris $\mathfrak{M}' \ldots \mathfrak{M}^{VI}$ *exhaustas* esse sex eas combinationes, quas ista (2) offert. Et sic ergo senarius numerus, (qui in hac tota theoria ubique necessario obviam est,) non ab *incognitarum* numero, (quae nempe tres tantum sunt,) sed mere ex dislocatione harum trium cum tribus *cognitis* oritur. Id est, numerus ille senarius non absolutus et *realis* est, (qui nempe sexti gradus resolutionem Generalem posceret,) sed est apparens et illusorius et mere combinatorius tantum. Incognitae enim *tres* numero, dislocando cum cognitis tribus, non efficiuntur, ut sex incognitae fiant. Res habet acuti quid; et nempe distinguendae sunt *incognitae* a meris *valoribus*. Incognitae sunt enim *tres*, valores ex combinando autem *sex*. Aequatio pro $\mathfrak{M}$ igitur, omnino quidem ad *senarium* numerum adscendit, sed manifeste ergo non *realem*, sed *combinationibus* tantum istis debitum. Intus et *algebraice* enim sunt haec nonnisi *trium* incognitarum categorias concoquendas habet. — Et jam ergo eam rem obiter quidem, sed ex vero tamen principio indigitavimus. In tali materia fas est, aliquid et lectoris meditationi relinqui. — Sic fit ergo, ut aequatio nostra:

5) $$\mathfrak{K}^6 - \pi'\mathfrak{K}^5 + \pi''\mathfrak{K}^4 - \pi'''\mathfrak{K}^3 + \pi^{IV}\mathfrak{K}^2 - \pi^{V}\mathfrak{K} + \pi^{VI} = 0$$

(radices habens $\mathfrak{M}' \ldots \mathfrak{M}^{VI}$) ad merae *cubicae* difficultatem redierit, ut vidimus; idque mediante $\varphi = \psi$, id est:

4) $$\mathfrak{M}' + \mathfrak{M}'' + \mathfrak{M}''' = \mathfrak{M}^{IV} + \mathfrak{M}_{V} + \mathfrak{M}^{VI}. \quad (\text{§. 40, Nro. 3—4.})$$

Sic patet autem, cur *aliás* etiam in hac omni theoria ad sextas (vel *Pseudo*-sextas nempe) perducamur; ut nunc *exemplis* praeclare doceo.

§. 54.

Intuere formulas (§. 38, Nro. 1). Numero quatuor et viginti coram sunt; qui radicum x, p, q, r perfectam *symmetriam* exhauriunt. Ergo illarum productum formabit aequationem:

1) $$L^{24} - AL^{23} + BL^{22} - \ldots + N = 0.$$

Coefficientes A ... N formabunt ergo functiones radicum x, p, q, r *symmetricas*, et exprimentur ergo per quintam solam radicem u. Sic ergo ista (1) repraesentat aequationem inter L et u, (vel si mavis ita scribere, inter L et x;) et ergo haec formula (1) cabbalistica sistit (ut semper hactenus pro gradibus inferioribus,) id quod *Relationalem* diximus. Hanc relationalem actu formare ex factoribus $L' \ldots L^{XXIV}$, immediato calculo impossibile est. Vel aliis verbis; quod casu cubico scribitur $L^2 - xL + \frac{a}{3} = 0$, id sursolido casu foret ista (1). Casu cubico enim relationalis haec ex natura rei adscendit ad gradum $1 \cdot 2 = 2$, casu sursolido adscendit ad gradum $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$. Ecce laboris differentiam. — Casu cubico nonnisi *duae* radices x et p occurrunt, ideo permutationes *duae* tantum $L = x - \alpha p$ et $L = p - \alpha x$. Ex quibus facile formatur quadratica, quae (ob $1 + \alpha\alpha = -\alpha$ et $x^2 + xp + p^2 = a$) ita habet:

$$L^2 + (1 - \alpha) qL - \alpha a = 0. \quad \text{Vel} \quad [\text{si } L = (\alpha - 1) u]:$$

$u^2 - xu + \frac{a}{3} = 0$, ut hactenus. Casu sursolido autem valor L continet radices x, p, q, r, *quatuor*; unde ergo combinationes 24 fiunt. Nec ergo praesenti casu istam (1), id est $x = f(L)$ exhibeo; novi autem artem, rem tamen assequendi. — At vero pone nunc, istam (1) discerpi in sex *biquadraticas*; et sit ergo:

2) $$L^4 - \mathfrak{A}L^3 + \mathfrak{B}L^2 - \mathfrak{C}L + \mathfrak{D} = 0.$$

Harum singula e *quaternione* singula (§. 38, Nro. 6) formatur; et formetur verbi causa haec (2) ex quaternione $L', L^{XI}, L^{XVII}, L^{XIX}$, ad coefficientem $\mathfrak{M}'$ spectante (§. 39, Nro. 2) — Ad oculos prodeunt in biquadraticae hujus coefficientibus praecise tales incognitae numero *tres*, quae ob combinationem cum valoribus numericis speciem *Senariam* mentiuntur; prorsus nempe ut supra de $\mathfrak{M}$ dictum est. Verbi causa (2) coefficiens $\mathfrak{B}$ dabit vel continebit functionem:

3) $\mathfrak{A}'(px+qr)+\mathfrak{A}''(qx+pr)+\mathfrak{A}'''(rx+pq)$.

vel breviter $\mathfrak{A}'P'+\mathfrak{A}''P''+\mathfrak{A}'''P'''$; ubi $\mathfrak{A}', \mathfrak{A}'', \mathfrak{A}'''$ sunt meri numerici. Qui numerici igitur combinando dislocati, incognitarum P', P'', P''' complexum videntur augere ad *senarium*. Atque si biquadraticas (2) *omnes* sex formaveris, ex dictis nempe quaternionibus, in sex his biquadraticis praecise exhaurietur senaria *dislocatio* dicta literarum $\mathfrak{A}', \mathfrak{A}'', \mathfrak{A}'''$ cum literis P', P'', P'''. Et *productum* demum biquadraticarum omnium, restituet *symmetriam* radicum x, p, q, r, et offeret istam (1), cujus coefficientes nempe meras *symmetricas* functiones radicum x, p, q, r continent. — Atque si praecedens (2) concipiatur in *hanc* formam:

4) $L^{20}-\mathfrak{M}L^{15}+\mathfrak{N}L^{10}-\mathfrak{O}L^{5}+\mathfrak{P}=0$ (§. 39, Nro. 1)

reducta, (quod fit per [illegible] operationes, humanas vires excedit autem,) exinde denuo patet, cur coefficientes $\mathfrak{M}, \mathfrak{N}$, [illegible] gradu psevdosexto (revera cubico autem) pendeant; quia nempe *primitivae* aequationis (2) coefficientes, tales functiones psevdo senas (revera cubicas autem) in sinu gerunt, ut vidimus. — Rem omnem autem nunc aliis adhuc verbis ad captum lectoris ponam. Intuere functionem (3), et pone illam $= V'$. Ex dislocatione literarum $\mathfrak{A}', \mathfrak{A}'', \mathfrak{A}'''$ cum literis P', P'', P''' oriuntur ergo valores omnino diversi *sex*, $V' \ldots V^{VI}$. Quodsi ex his jam formaveris aequationem sexti gradus, aequatio haec erit mere *psevdo*-sexta, et absoluta et algebraica ejus resolutio pendebit mere ab resolutione alicujus *cubicae*. Parce autem tuo experimento; subinde mox enim ipse talem praecise casum ante lectoris obtutum sistam. — Praemittam autem aliud rei totius specimem. Respice (§. 52, initio). Disserebam ibi de *inverso* quoad $x=P+Q+R+S$ problemate; nempe radicem hanc, et porro radicem $x=\mathfrak{A}P+\mathfrak{B}Q+\mathfrak{C}R+\mathfrak{D}S$ (§. 45, Nro. 6) et porro radices reliquas, ad o reductas et in se deinductas, comparando cum data $x^5+bx^3+cx^2+dx-y=0$. Dixi ibi, inversam hanc methodum praecise *easdem* pro P, Q, R, S functiones asymmetricas et psevdo-senarias exhibere, quas directa methodus pro *his* x, p, q, r exhibeat. Si dictam inversam methodum actu inis, ipse *obtutus* te docebit, rem ita habere. Et *simplicissimam* quidem talem functionem psevdo senariam ante oculos cernes *hanc*:

5) $\mathfrak{A}'(PQ+RS)+\mathfrak{A}''(PR+QS)+\mathfrak{A}'''(PS+QR)$.

ubi $\mathfrak{A}', \mathfrak{A}'', \mathfrak{A}'''$ meri numerici. Et hic (5) ecce ergo literarum P, Q, R, S *eandem* functionem asymmetricam psevdo senariam, qualem supra (Nro. 3) pro *his* x, p, q, r exhibui. Similiter cum reliquis habet.

§. 55.

Egregio jam hujus rei specimine eoque *actuali* desinam. — Intuere primitivum systema dualisticum (§. 38, Nro. 2). Scribe ibi abbreviando:

1) $T'=A(q+r)+B(x+p)$

2) $T''=A(x+p)+B(q+r)$.

Et sic ordine deinceps usque ad T^{VI}; unde pro T prodibit aequatio *sexti* gradus. Quoniam autem in his sex pro T valoribus, manifesto omnes talium binionum $q+r$ combinationes exhauriuntur, ideo dicta sexti gradus pro T aequatio erit quoad radices x, p, q, r *symmetrica*, et coefficientes hujus sextae igitur per solam *quintam* u exhiberi poterunt (§. 25). Et hanc sextam ergo nunc patebit *psevdo*-sextam esse, et resolutionem ejus absoluto et algebraico sensu pendere a sola difficultate aequationis *cubicae*. — Ex istis T', T'' formabis quadraticam $T^2-\pi T+\vartheta=0$. Habebis $\pi=(A+B)(x+p+q+r)$, vel, abbreviando $A+B=-\mathfrak{A}$ fit: $\pi=\mathfrak{A}u$. Pro reliquis duabus quadraticis pariter habebis $T'''+T^{IV}=\mathfrak{A}u$, $T^{V}+T^{VI}=\mathfrak{A}u$. Sic ergo habetur proprietas dictae sextae *haec*:

3) $T'+T''=T'''+T^{IV}=T^{V}+T^{VI}$.

Transi nunc ad reliquum terminum $\mathfrak{S}$. Reperies pro $T^{v}T^{\prime\prime}$ et $T^{\prime\prime\prime}T^{IV}$ et $T^{V}T^{VI}$ respective:

4) $$\mathfrak{S}' = \mathfrak{B}(q+r)(x+p) + \mathfrak{C}[(q+r)^2 + (x+p)^2].$$
$$\mathfrak{S}'' = \mathfrak{B}(p+r)(x+q) + \mathfrak{C}[(p+r)^2 + (x+q)^2]$$
$$\mathfrak{S}''' = \mathfrak{B}(p+q)(x+r) + \mathfrak{C}[(p+q)^2 + (x+r)^2].$$

ubi $\mathfrak{B} = A^2 + B^2$ et $\mathfrak{C} = AB$. Et sic ergo quadraticas respective tres concinnavimus:

5) $$T^2 - \pi T + \mathfrak{S}' = o,\ T^2 - \pi T + \mathfrak{S}'' = o,\ T^2 - \pi T + \mathfrak{S}''' = o.$$

Attente considera nunc istos (4); videbis ex x, p, q, r posse functiones tales ut ibi cernuntur, non plures formari, quam praecise hos *tres* $\mathfrak{S}', \mathfrak{S}'', \mathfrak{S}'''$. Id est cubica ex illis formata:

6) $$\mathfrak{S}^3 - \mathfrak{A}'\mathfrak{S}^2 + \mathfrak{A}''\mathfrak{S} - \mathfrak{A}''' = o$$

continebit functiones radicum x, p, q, r *symmetricas* tantum, id est coefficientes $\mathfrak{A}', \mathfrak{A}'', \mathfrak{A}'''$ per solam *quintam* radicem u exhibebuntur. Et sic ergo pseudosexta pro T aequatio, (quintam radicem u in coëfficientibus gerens,) in quadraticas (5) resolvitur, mediante sola *cubica* (6)! — Quamquam autem haec sexta pro T aequatio, operationes nostras expresse non ingressa fuerit, egregie tamen ad actuale exemplum exhibendum quadrabat, quia *calculos prolixos* res non poscebat.

§. 56.

Ceterum quia theoria sursolidam resolvendi penitus et absolute mirabili ista pseudo-*sextarum* resolubilitate nititur, ideo pro dignitate materiae consultum videtur, ut in exemplum *directum*, ad resolutionem nempe *directe* mittens desinam. Quo titulo autem insigne *mysterium* cabbalae, quod brevitatis causa mihi ipsi reservaveram, communicabo nunc tamen. — Lectores autem locos hujus libri, quos citamus, impigre *respicere* consultum est. — Intuere (§. 38, Nro. 6—9) systema *quaternionum*, horizontali ordine ibi dispositarum, et intermedio diaphragmate in *duas* cohortes distinctarum. Ordinationem hanc itemque distinctionem hanc ope diaphragmatis explicui suis locis. Et satis est in memoriam revocare, quod quaternionum hoc duplex quasi conclave, produxerit principales istas dislocationes (§. 40, Nro. 5—6), quas respice, et pro quibus demonstravi esse:

1) $$\mathfrak{M}' + \mathfrak{M}'' + \mathfrak{M}''' = \mathfrak{M}^{IV} + \mathfrak{M}^{V} + \mathfrak{M}^{VI},$$

seu $\varphi = \psi$. Et sic ergo tota theoria eum tenorem habuit, ut pervenirem ad *Biquadraticam:*

2) $$L^{20} - \mathfrak{M}L^{15} + \mathfrak{N}L^{10} - \mathfrak{O}L^{5} + \mathfrak{P} = o \quad (\S\ 54,\ \text{Nro}\ 4)$$

cujus coefficientes a *Sexta* penderent, quae sexta, directrice *quaternionum* tabula, demonstrabatur esse *resolubilis*. — Habes nunc totam rem. — Et monui (§. 51), singulam talem (2) biquadraticam, (nam earum *sex* ergo existunt) referri ad singulam *primitivam* biquadraticam:

3) $$L^4 - \mathfrak{A}L^3 + \mathfrak{B}L^2 - \mathfrak{C}L + \mathfrak{D} = o,$$

quarum item sex existunt. — Et his praemissis jam sciendum est, quod praeter hanc totam theoriam, quam Horizontalem nuncupavi, etiam altera seu *Verticalis* coexistat, et compossibili modo juxta illam parallele quasi incedat. — Existit hic nempe casuum alternatio seu *Duplicitas*, et loco *Biquadraticae* (2) nempe, cujus coëfficientes a *Sexta* pendent, potest pari titulo vice versa formari *Sexta:*

4) $$L^{30} - \mathfrak{R}L^{25} + \mathfrak{S}L^{20} - \mathfrak{T}L^{15} + \mathfrak{U}L^{10} - \mathfrak{W}L^{5} + \mathfrak{X} = o,$$

cujus coefficientes $\mathfrak{R}$.... a gradu *biquadratico* pendent, et vero e contrario de *totali* (4), quae nempe Sexti gradus est, jam demonstrandum erit, eam resolubilem et nempe *pseudo*-sextam esse. Agitur ergo de theoretica *distinctione* requisita valorum L; siquidem coeca et arbitraria operatione vel mixtura valorum nihil efficitur. Ob oculos pone fundamentalem tabulam (§. 38, Nro. 1). Priori theoria valores $L' \ldots L^{XXIV}$ distinguendi erant in sex *quaterniones*, idque positio *horizontalis* fuit. Nunc vice versa distinguendi sunt in quatuor *Sexternas*, et id jam procedat positione *Verticali*. — Ut ergo

pro valoribus L nanciscamur competentes conjugatas quatuor sexternas, redeundum est ad ipsas (§. 38, Nro. 1). Cernis hic, valores $L' \ldots L^{VI}$ ita ordinatos esse, ut radicem r communiter pro *prima* seu *antesignana* habeant. Similiter sequentes $L^{VII} \ldots L^{XII}$ omnes radicem q antesignanam habent. Deinde sequi cernis antesignanam radicem p, et denique radicem x. Tale systema singulum ut $L' \ldots L^{VI}$ continet ergo radicem localiter *fixam* r, et post fixam hanc sequuntur [illegible] reliquarum x, p, q [illegible] combinationes vel translocationes, quae sunt numero sex. Quemadmodum ergo in superiori theoria hi valores L distinguebantur in sex *biquadraticas* (Nro. 3), ita in praesenti distinguuntur vice versa in quatuor *Sextas*. Tanquam si quis e manipulo 24 militum nunc sexies eligat viros *quatuor*, alio tempore quater eliget viros *sex*. — Et sic ergo dictos (§. 38, Nro. 1) valores distinctos [illegible] in cohortes *quatuor*, nempe co[illegible], et sic ordine deinceps. Et sic igitur probata est [illegible] dirigens, ubi de valoribus L secundum *Sexternas* conjugandis agitur, quin rem ad finem sane [illegible] perducturi sumus. Patebit autem jam, sexternas has conjugatas in tabula fundamentali (§. 38, Nro. 6—7) exstare et locatas esse *verticaliter*, quemadmodum quaternionum conjugatio locata fuerat *horizontaliter*. Consultum autem est, eam tabulam alio ordine scriptam denuo exhibere:

5) $L' + L^{XII} + L^{XVII} + L^{\ldots}$

$L^{III} + L^{\ldots} + L^{\ldots} + L^{\ldots}$

$L^{VI} + L^{X} + L^{XIII} + L^{\ldots}$

6) $L^{II} + L^{XII} + L^{XVIII} + L^{XX}$

$L^{IV} + L^{VIII} + L^{XV} + L^{XXII}$

$L^{V} + L^{IX} + L^{XIV} + L^{XXIII}$.

Comparando singulam quaternionem cum dicta superiori tabula, intelliges, quod mathematice loquendo prorsus nihil mutaverim. At vero *locos* literarum in quavis quaternione ita transtuli, ut praesens scriptio omnino ad obtutum *commodior* sit, et nempe universas sexternas *verticaliter* tanquam regularitate militari ob oculos ponat. Cernis ergo hic (5—6) quaternionum *horizontale* systema, quod autem quum quo tempore praestanda praestiterit, nunc pro exauctorato est. Et porro cernis autem sexternarum *verticale* systema; de quo nunc sermo est. Perlustra nunc oculis verticalem seriem *primam*: Videbis in illa occurrere complete omnes valores $L' \ldots L^{VI}$. Perlustra *secundam* verticalem, et reperies in illa complete omnes $L^{VII} \ldots L^{XII}$. Similiter in tertia complete omnes $L^{XIII} \ldots L^{XVIII}$, et in quarta denique omnes $L^{XIX} \ldots L^{XXIV}$. Et sic ergo series verticalis prima, secunda, tertia, quarta, exhibitura respective cohortem (§. 38, Nro. 1) primam, secundam, tertiam, quartam, in quas nempe [illegible] L assumendo suo antesignano distinxeram. Quod autem singula verticalis series literas L ordine [illegible] quasi perturbato et *promiscuo* videtur exhibere, ejus rei profundam et excellentissimam causam subinde ex ipsa theoria pervidebimus. (At sensim procedendum est.) Quum enim per conjugationem debitam simplicium L, (Nro. 5—6) simul conjugatio quintarum *potentiarum* L^{5} data sit, ergo pro sex potentiis talibus, quibus nostra (4) conflatur, eligenda est vel series verticalis *prima*, vel *secunda*, vel *tertia*, vel *quarta*. At vero ista (4) necessario debet hos casus omnes *simul* exhibere, id est, coefficiens $\mathfrak{R}$ pendebit a *biquadratica*. Existunt ergo nempe *quatuor* aequationes ut (4), earumque *productum* sistet istam absolutam rationalem $L^{\ldots} - \ldots = 0$. Ergo, cum sufficiat, rem pro uno coefficiente $\mathfrak{R}$ exponere, nanciscitur is valores quatuor $\mathfrak{R}', \mathfrak{R}'', \mathfrak{R}''', \mathfrak{R}^{IV}$. Et nempe in se complectitur hos casus quatuor *simul*:

7) $L^{5} + L^{5} + L^{5} + L^{5} + L^{5} + L^{5} = \mathfrak{R}'$

$L^{5} + L^{5} + L^{5} + L^{5} + L^{5} + L^{5} = \mathfrak{R}''$

$$L^5 + L^5 + L^5 + L^5 + L^5 + L^5 = \mathfrak{R}'''$$

$$L^5 + L^5 + L^5 + L^5 + L^5 + L^5 = \mathfrak{R}^{IV}.$$

Comuis hic nempe *horizontaliter* jam scriptos, qui supra (Nro. 5—6) positi sunt *verticaliter*. Ex his (7) orietur biquadratica:

8) $\mathfrak{R}^4 - \lambda'\mathfrak{R}^3 + \lambda''\mathfrak{R} - \lambda'''\mathfrak{R} + \lambda^{IV} = 0.$

Et similes jam biquadraticae ergo formabuntur pro reliquis $\mathfrak{S}, \mathfrak{T} \ldots \mathfrak{X}$. — Probe nunc attende. Quamquam enim horrendis istis calculis, quos in *horizontali* jam theoria lectori condonavimus, multo minus nunc in accessorio hoc themate indulgendum sit, loquar sic tamen, ut pateat, quomodo se res habeant. Si (7) valorem $\mathfrak{R}'$ actu computes, conflabitur is ex functionibus radicum x, p, q, r, nonsymmetricis. In his non symmetricis praedominabitur radix x, nempe illa *fixa* cohortis $L' \ldots L^{VI}$ (§. 38. Nro. 1); ad hanc enim fixam cohortem radix (2) prima $\mathfrak{R}'$ manifeste pertinet. Similiter in functionibus non symmetricis secundae $\mathfrak{R}''$ praedominabitur fixa radix q, quae nempe antesignana in *secunda* cohorte (§. 38) fuit. Similiter pro $\mathfrak{R}'''$ et similiter denique pro $\mathfrak{R}^{IV}$. — Vel aliis verbis. Radix $\mathfrak{R}'$ praebebit verbi causa (actuali computatione) terminum non symmetricum $\mathfrak{A}'r^4(x+p+q)$; ubi $\mathfrak{A}'$ numericus. Radices $\mathfrak{R}''$, $\mathfrak{R}'''$, $\mathfrak{R}^{IV}$ autem respective hos praebebunt:

$$\mathfrak{A}'q^4(x+p+r) \qquad \mathfrak{A}'p^4(x+q+r) \qquad \mathfrak{A}'x^4(p+q+r).$$

id est, radix una $\mathfrak{R}'$ in se involvit *quatuor* casus, qui nempe successive et complete per $\mathfrak{R}'$, $\mathfrak{R}''$, $\mathfrak{R}'''$, $\mathfrak{R}^{IV}$ exhibentur. Id est, productum (8) in coefficientibus $\lambda' \ldots$ perfectam *Symmetriam* radicum x, p, q, r restituet, ergo hi $\lambda' \ldots$ exprimentur per solam u *quintam*, quae vero sponte ex calculo abit. Sic coefficientes $\lambda' \ldots \lambda^{IV}$ per b, c, d, y habentur. Pro primo λ' autem calculus est superfluus. Nam λ' est summa omnium 24 potentiarum $L^5 \ldots$, quae summa (per §. 40—41) est $= 10\mathfrak{A}(bc - 25y)$. — Atque haec ergo nempe praecise est vis et virtus conjugationum (7) ab fixis cohortibus (§. 38) petitarum, ut effectum nempe hactenus dictum exserant. Nimirum si (7) pro $\mathfrak{R}' \ldots \mathfrak{R}^{IV}$, sextarum potentias L^5 et cetera pro coeco *labitu* conjugabis, utique dicto successu semper [illegible]. — [illegible] tes calculos in hac re adornare penitus extra scopum nec mihi [illegible] est; ideo (ut curiosis etiam theoriae principalia momenta complete saltim exhibeam) historice [illegible] referam, quod solum superest, nempe ordinationem rerum, ut aequatio (4) pseudosexta ad *cubicum* gradum debite producatur; hactenus enim de sextae illius *coefficientibus* locuti sumus, qui [illegible] pendentes a *biquadratica*. — Intuere istam (4); decomponenda est ea in duas cubicas. Hocque quidem negotio excellentissima et admirabilis theoriae pulchritudo denuo palam fiet. — Quodsi hujus (4) radices ad seriem verticalem *primam* (Nro. 5) referas, id est si (Nro. 7, $\mathfrak{R}'$) *horizontales* primas $L^5, \ldots$ pro sextae (4) dictae radicibus pones, tunc, manuducente diaphragmate (Nro. 5—6), cujus divina virtus hic denuo in scenam prodit, sextam dictam in duas cubicas *has* decompones:

9) $L^{15} - \mathfrak{A}L^{10} + \mathfrak{A}''L^5 - \mathfrak{A}''' = 0$, radicum L^5, L^5, L^5.

10) $L^{15} - \mathfrak{D}L^{10} + \mathfrak{D}''L^5 - \mathfrak{D}''' = 0$, radicum L^5, L^5, L^5.

ut nempe cubicae prioris radices desumtae sint ex diaphragmatis (5—6) conclavi *superiori*, posterioris ex conclavi *inferiori*. — Jam vero ad sextam (4) aeque pertinet, ut vidimus, cohors fixa *secunda*, *tertia*, *quarta* (§. 38), id est (Nro. 5—6) series *verticalis* secunda, tertia, quarta, id est (7) series *horizontalis* senaria $\mathfrak{R}''$, $\mathfrak{R}'''$, $\mathfrak{R}^{IV}$, ideo has ambo *cubicae* (9—10) quoque, hos quatuor casus comprehendunt *simul*. Id est, cubicarum (9—10) coefficientes a *biquadratica* denuo pendent, sicut sextae ipsius (4) coefficientes pependerant; et nempe (si de solis primis $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{D}$ (Nro. 12, 13.) loquor), pro cubica priori:

11) $L^{15} - \mathfrak{A}L^{10} + \mathfrak{B}L^{5} - \mathfrak{C} = 0$ erit:

12) $\overset{\text{I}}{L^5} + \overset{\text{III}}{L^5} + \overset{\text{VI}}{L^5} = \mathfrak{A}'$. $\quad \overset{\text{XI}}{L^5} + \overset{\text{VII}}{L^5} + \overset{\text{X}}{L^5} = \mathfrak{A}''$. [Heic $\mathfrak{A}'$ sistit datum (9).]

$\overset{\text{XVII}}{L^5} + \overset{\text{XVI}}{L^5} + \overset{\text{XIII}}{L^5} = \mathfrak{A}'''$. $\quad \overset{\text{XIX}}{L^5} + \overset{\text{XXI}}{L^5} + \overset{\text{XXIV}}{L^5} = \mathfrak{A}^{IV}$. Et pro:

13) $L^{15} - \mathfrak{D}L^{10} + \mathfrak{E}L^{5} - \mathfrak{F} = 0$ (sic enim secundam scribam,) erit:

$\overset{\text{II}}{L^5} + \overset{\text{IV}}{L^5} + \overset{\text{V}}{L^5} = \mathfrak{D}'$. $\quad \overset{\text{XIV}}{L^5} + \overset{\text{VIII}}{L^5} + \overset{\text{IX}}{L^5} = \mathfrak{D}''$.

$\overset{\text{XVIII}}{L^5} + \overset{\text{XV}}{L^5} + \overset{\text{XII}}{L^5} = \mathfrak{D}'''$. $\quad \overset{\text{XX}}{L^5} + \overset{\text{XXIII}}{L^5} + \overset{\text{XXII}}{L^5} = \mathfrak{D}^{IV}$. [Heic $\mathfrak{D}'$ sistit datum (10).]

In quo negotio brevis inspectio docet, prioris (11) cubicae radices ad unam omnes cadere super diaphragma (Nro. 5), posterioris (13) autem infra diaphragma. Et similiter jam pro reliquis coefficientibus $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ et $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{F}$ manifesti sunt biquadratici seu quatuor valores. Verbi causa (Nro. 12):

$L^5 L^5 + L^5 L^5 + L^5 L^5 = \mathfrak{B}'$, et porro. Et (Nro. 14):

$\overset{\text{II}}{L^5}\overset{\text{IV}}{L^5} + \overset{\text{II}}{L^5}\overset{\text{V}}{L^5} + \overset{\text{IV}}{L^5}\overset{\text{V}}{L^5} = \mathfrak{E}'$, et porro.

Et sic ergo cubicarum (11 et 13) coefficientes item a *biquadratica* debite pendent, sicut aequationis *primitivae* (4) coefficientes pependerant. Ad hunc enim gradum aequatio sursolida immediate reduci debet. Loco *sextae* (4) autem, res ergo revocata est ad algebraicam difficultatem *cubicam* (11 et 13). Et quemadmodum in theoria horizontali, obvia ibi sexta ad cubicam revocata est mediante *quadratica* (§. 43), sic idem et *hic* debite contingit. Nempe quum ista (8), ad sextam (4) pertinens, coefficientes λ'... habuerit *rationales*, sic aequationes:

$$\mathfrak{A}^4 - \mathfrak{L}'\mathfrak{A}^3 + \mathfrak{L}''\mathfrak{A}^2 - \mathfrak{L}'''\mathfrak{A} + \mathfrak{L}^{IV} = 0$$

$$\mathfrak{D}^4 - \mu'\mathfrak{D}^3 + \mu''\mathfrak{D}^2 - \mu'''\mathfrak{D} + \mu^{IV} = 0$$

ex (12) et (14) respective conflandae, nanciscuntur coefficientes *non* rationales, et a *quadratica* nempe pendentes. Et quidem eo tenore, ut pro $\mathfrak{L}'$, μ' obtineatur:

$$\mathfrak{L}' = \tfrac{1}{2}\lambda' + \sqrt{H}, \qquad \mu' = \tfrac{1}{2}\lambda' - \sqrt{H}.$$

Quorum summa $\mathfrak{L}' + \mu' = \lambda'$ sistit, ut fas est. Et quadratica repraesentat se nempe (ut §. 32, lit. B) sub forma duarum radicum seu functionum *Semi*-symmetricarum, quarum *productum* demum symmetriam restituit, et ergo nempe quadraticam *rationalem* sistit. — Et jam autem theoriam etiam Verticalem complete *dixi*. Reliqua sunt meri mechanici calculi; pro potentiis L^5... valores actuales (§. 38, Nro. 1) reponendo. Ceterum pulchriorem rerum et operationum concentum, quam qui in theoria cabbalae hac tum horizontali tum verticali se exserit, vix usquam in analysi reperire promtum fuerit.

§. 57.

Venio nunc ad egregium tandem eum casum, qui theoriam hanc verticalem nempe a me elicuit. — Intuere tabulam (§. 38, Nro. 1). — Ex his L'...L^{VI} pone formari sextam:

1) $L^6 - \mathfrak{A}L^5 + \mathfrak{B}L^4 - \mathfrak{C}L^3 + \mathfrak{D}L^2 - \mathfrak{E}L + \mathfrak{F} = 0$

Hanc dico sextam *fixam* (a fixo r antesignano; rem enim non recoquo.) Similiter ex L^{VII} ... L^{XII} conflabitur sexta fixa *secunda*. Et porro. — Hae quatuor fixae ut (1) exhauriunt ergo dictam totam tabulam, et earum productum restituit *symmetriam* radicum x, p, q, r. Nam singula sexta fixa ut (1), est symmetrica pro tribus tantum *postsignanis*; quorum nempe translocationes in radicibus L'... L^{VI} exhauriuntur. — Ergo (ut semper in tali casu) sufficit, *unam* talem sextam fixam (1) exhibere. Nam si tali modo verbi causa $\mathfrak{A}$ habetur, tum ex permutatione sola, valores *omnes* $\mathfrak{A}'$, $\mathfrak{A}''$, $\mathfrak{A}'''$, $\mathfrak{A}^{IV}$

habebuntur. Habetur autem pro (1) valor $\mathfrak{A} = \mathfrak{M}r + \mathfrak{N}(x+p+q)$. Ubi $\mathfrak{M}, \mathfrak{N}$ numerici. Ergo pro *omnibus* sextis fixis respective erit:

$$
\begin{aligned}
2)\qquad \mathfrak{A}' &= \mathfrak{M}r + \mathfrak{N}(x+p+q) \\
\mathfrak{A}'' &= \mathfrak{M}q + \mathfrak{N}(x+p+r) \\
\mathfrak{A}''' &= \mathfrak{M}p + \mathfrak{N}(x+q+r) \\
\mathfrak{A}^{IV} &= \mathfrak{M}x + \mathfrak{N}(p+q+r).
\end{aligned}
$$

Unde pro $\mathfrak{A}$ formatur biquadratica, cujus coefficientes jam quoad x, p, q, r *symmetrici* fiunt, ideoque per quintam u exprimentur. Eadem (1) de $\mathfrak{B} \ldots \mathfrak{F}$ intellige. Ponamus ergo istam (1) complete exhibitam esse, (res enim extra vires laboriosi hominis non est.) Haec (1) jam erit manifesto *primitiva* istius (§. 56, Nro. 4); habet enim radices *simplices* $L' \ldots L^{VI}$, quas ista *surosolida* $L^5 \ldots L^5$ continet. — Quemadmodum ergo ista *superior* demonstrata est mere pseudosexta esse, (pro qua re autem ob molem calculorum, solam *Theoriam* operationum describere potui,) ita jam de praesenti *primitiva* (1) quoque demonstrandum est, quod resolubilis et mere *pseudo*-sexta sit. Intuere (§. 38, Nro. 1) *radices* ejus; sume differentias, ut hic sequitur:

$$
\begin{aligned}
3)\qquad L' - L'' &= \mathfrak{K}[p-x] \\
L''' - L^{IV} &= \mathfrak{K}[x-q] \\
L^{V} - L^{VI} &= \mathfrak{K}[p-q].
\end{aligned}
$$

Si $\mathfrak{K}$ numericus.

Has considerando, cum admiratione cernes esse:

$$4)\qquad \mathfrak{K}[p-x] + \mathfrak{K}[x-q] = \mathfrak{K}[p-q].$$

Id est in (3) membrum tertium est *summa* duorum *praecedentium*. Ergo similiter ad *sinistram* partem habetur $L' - L'' + L''' - L^{IV} = L^{V} - L^{VI}$, id est:

$$5)\qquad L' + L''' + L^{VI} = L'' + L^{IV} + L^{V}.$$

Similiter jam ibidem pro cohorte fixa *secunda* habebis $L^{VII} - L^{VIII} = \mathfrak{K}[p-r]$, $L^{XI} - L^{XII} = \mathfrak{K}[x-p]$, $L^{IX} - L^{X} = \mathfrak{K}[x-r]$. Ecce tertia denuo est summa duarum *priorum*. Similiter pro cohorte *tertia* fixa formabis $L^{XIII} - L^{XIV} = \mathfrak{K}[x-r]$, $L^{XVII} - L^{XVIII} = \mathfrak{K}[r-q]$, $L^{XV} - L^{XVI} = \mathfrak{K}[x-q]$. Ecce tertia denuo est summa duarum priorum. — Denique pro cohorte *quarta* fixa formabis $L^{XIX} - L^{XX} = \mathfrak{K}[q-r]$, $L^{XXI} - L^{XXII} = \mathfrak{K}[r-p]$, $L^{XXIII} - L^{XXIV} = \mathfrak{K}[q-p]$. Ubi ultima denuo est summa ambarum priorum. — Et sic ergo operando ut casu primo (3—4—5), ante oculos prodit aequationum tale spectaculum:

$$
\begin{aligned}
6)\qquad L' + L''' + L^{VI} &= L'' + L^{IV} + L^{V}, \\
L^{XI} + L^{VII} + L^{X} &= L^{XII} + L^{VIII} + L^{IX} \\
L^{XVII} + L^{XVI} + L^{XIII} &= L^{XVIII} + L^{XV} + L^{XIV}. \\
L^{XIX} + L^{XXI} + L^{XXIV} &= L^{XX} + L^{XXII} + L^{XXIII}.
\end{aligned}
$$

Inspice nunc tabulam diaphragmaticam (§. 56, Nro. 5—6) et omnem rem habes. Praesentes (6) *sinistrae* cadunt nempe omnes *supra* diaphragma, at vero dextrae omnes cadunt *infra*, et nempe ita ut singula trias verticalis *infra* diaphragma, sit *aequalis* triadi verticaliter *incumbenti*. Et jam vero theoriae *leges ad unum omnes* habes; quod mihi pro majestate problematis unice proposueram. Et sic ergo patet, cur ille verticalium serierum ordo *apparenter* tantum perturbatus dici debeat, et cur et qua lege praecise tales vel tales tres cadant *supra* diaphragma, atque tales vel tales *infra* cadant in singula serie. Et clarum est, praecedentes (6) triadum aequalitates eodem sensu fundamentales esse pro *verticali* theoria, quo binionum aequalitates (§. 38, Nro. 4) fundamentales fuerant pro *horizontali* theoria. Et sic ergo mirabilis ille in *decompositione* successus (§. 56, Nro. 11—13) intelligitur. Intuere ibi literam $\mathfrak{A}$, et dein $\mathfrak{D}$. Cernes, triadas utrinque *eas* conjugatas esse, quarum primae potentiae *aequales* sunt. Intellige:

$$L^3 + L^3 + L^3 = \mathfrak{A}' \qquad L^3 + L^3 + L^3 = \mathfrak{D}'$$

$$L' + L''' + L^{VI} = L'' + L^{IV} + L^{V}.$$

Idem de $\mathfrak{A}''$, $\mathfrak{D}''$ et $\mathfrak{A}'''$, $\mathfrak{D}'''$ et $\mathfrak{A}^{IV}$, $\mathfrak{D}^{IV}$ liquet. — At vero nunc redi ad istam (1), quae est radicum $L' \ldots L^{VI}$. Ecce nempe ob relationem (6), decomponitur in duas *cubicas*:

7) $$L^3 - \varphi L^2 + \vartheta L - \delta = 0 \text{ radicum } L', L''', L^{VI}$$

$$L^3 - \psi L^2 + \lambda L - \omega = 0 \text{ radicum } L'', L^{IV}, L^{V}.$$

in quibus jam nempe est $\varphi = \psi$, et ergo sexta (1) est *psevdo*-sexta; ejus nempe resolutio prorsus in tenorem istius (§. 40, Nro. 2. 3. 4) procedit. Et ergo sexta fixa (1), (in coefficientibus gerens antesignanam r, et postsignanarum x, p, q functiones symmetricas,) decomponitur in duas *cubicas* (involventes item tum istam r tum reliquarum x, p, q functiones symmetricas.) — Et non possum, quin totum pulcherrimum successum rei, ordine heic transscribam adhuc. — In praesenti nempe casu, (in quo non cum *potentiis* $L^3 \ldots$ sed cum *simplicibus* $L' \ldots$ radicibus res est,) negotium facile in vires hominis cadit, et experimentum ergo pro egregio actuali specimine resolubilitatis psevdosextarum inservit, quae theoriae sprasolidae cardo sunt. — Ceterum in hoc *ipso* problemate (Nro. 7) expediendo lectori ansam dedi, ut sua sponte inventi (Nro. 6) admirabilem etiam *continuationem* nanciscatur. Reperiet nempe (levi calculo), esse (§. 38, Nro. 1)

8) $$L'L''' + L'L^{VI} + L'''L^{VI} = L''L^{IV} + L''L^{V} + L^{IV}L^{V};$$

$$L^{XI}L^{VIII} + L^{XI}L^{X} + L^{XII}L^{VIII} = L^{XII}L^{VIII} + L^{XII}L^{IX} + L^{VIII}L^{IX}.$$

Et sic porro pro omnibus (Nro. 6) triadibus; et nempe aequalitas ista persistit pro binionibus etiam, et (Nro. 7) est igitur non modo $\varphi = \psi$, sed et porro $\vartheta = \lambda$. Quodsi ergo *porro* denique foret $\delta = \omega$, tum ambo cubicae (Nro. 7) haberent radices penitus *easdem*. Quod fieri nequit; nam valores dicti (§. 38) natura sua omnes inter se diversi sunt. Sic ergo intelligis, pro δ et ω id est pro $L'L'''L^{VI}$ et $L''L^{IV}L^{V}$ *aequalitatem cessare*. Et in scenam potius pro his productis prodit spectaculum illud *quadraticae* aequationis, quod in psevdosextarum decompositione semper obviam est et esse debet. Reperies nempe, (si $\mathfrak{A} \ldots \mathfrak{N}$ numerici):

9) $$L'L'''L^{VI} = \mathfrak{A}r^3 + \mathfrak{B}r^2(x+p+q) + \mathfrak{C}r(x^2+p^2+q^2)$$
$$+ \mathfrak{D}r(xp+xq+pq) + \mathfrak{E}(x^3+p^3+q^3) + \mathfrak{F}pqx$$
$$+ \mathfrak{M}(pq^2+qx^2+xp^2) + \mathfrak{N}(p^2q+q^2x+x^2p).$$

Cernis hic primo radicem antesignanam seu characteristicam r. Deinde in terminis $\mathfrak{B}, \mathfrak{C}, \mathfrak{D}, \mathfrak{E}, \mathfrak{F}$ cernis postsignanarum x, p, q functiones debite *symmetricas*. At vero termini ambo *ultimi* sunt *semi*-symmetrici; quales saepe et clare descripsi, et quorum *summa* demum, vel etiam *productum*, symmetriam functionum restituit. Id est membra haec ambo sunt *irrationalia*, nempe ab *quadratica* pendentia. Quodsi ergo (9) pars rationalis scribatur per A, irrationales partes per H', H'', tum erit:

10) $$L'L'''L^{VI} = A + \mathfrak{M}H' + \mathfrak{N}H''.$$

Nunc vero computabis *alterum* quoque productum; et reperies omnia prorsus ut pro priori (10), nisi quod irrationales partes locum *permutaverint*. Id est habebis:

11) $$L''L^{IV}L^{V} = A + \mathfrak{M}H'' + \mathfrak{N}H'. \text{ Unde sit}$$

12) $$H'^2 - \mathfrak{P}H' + \mathfrak{Q}'' = 0 \text{ radicum } H', H''.$$

Cognoscis ergo jam pro hac coefficientes $\mathfrak{P}$ et $\mathfrak{Q}''$ symmetricos quoad x, p, q. Et resolvendo

13) $$H' = B + \gamma\sqrt{N}$$
$$H'' = B - \gamma\sqrt{N}.$$

Et erunt jam tum B tum N *symmetrici*. Jam hos (13) impone in (10) et (11), eritque:

$$L' L''' L^{VI} = A + (\mathfrak{M} + \mathfrak{N}) B + (\mathfrak{M} - \mathfrak{N}) \sqrt{N}.$$
$$L'' L^{IV} L^{V} = A + (\mathfrak{M} + \mathfrak{N}) B - (\mathfrak{M} - \mathfrak{N}) \sqrt{N}.$$

Positaque rationali parte $= M$, et factore numerico $\mathfrak{M} - \mathfrak{N} = \mathfrak{P}$, fit:

14)
$$L' L''' L^{VI} = M + \mathfrak{P} \sqrt{N}.$$
$$L'' L^{IV} L^{V} = M - \mathfrak{P} \sqrt{N}.$$

Et sic ergo sexta (1) decomposita est in *has*: (Nro. 7)

15)
$$L^3 - \varphi L^2 + \vartheta L - M - \mathfrak{P} \sqrt{N} = o$$
$$L^3 - \varphi L^2 + \vartheta L - M + \mathfrak{P} \sqrt{N} = o.$$

in quibus coefficientes φ, ϑ, M, N dantur per antesignanam r et reliquarum x, p, q functiones *symmetricas*. Et sic ergo psevdosextae nostrae (quae psevdosextae (§. 56, Nro. 4) matrix est,) decompositionem *actu* vel quasi praemanducavi; siquidem in hoc negotio interior valorum *L* natura et intimus quasi recessus sponte in scenam prodibat. Quaecunque *alias* porro proprietates insunt, sunt ex dictis inventis mera consectaria. Quoad biniones *horizontalis* theoriae (§. 38, Nro. 4), mutatis mutandis eadem fere contingunt, pro genio nempe systematum, quae ibi tractanda occurrunt. Nec enim ad calculos relabor. — Satis est, omnes, qui opus fuerant, commeatus analyticos esse subvectos, et materiae divitem hunc librum esse; quem quidem legi cum grano salis fas est. — Hoc unum repeto, quod psevdosextarum ut (1) existant ergo *quatuor*; quarum singula continet suam radicem competentem *antesignanam* et reliquarum trium radicum functiones *symmetricas*. Casus nempe a me subinde tractatus est intar omnium. Et *productum* harum quatuor psevdosextarum, restituet jam symmetriam pro *omnibus* quatuor radicibus x, p, q, r, et ergo exprimetur per solam quintam u. Et haec aequatio inter *L* et u (vel si libet dicere inter *L* et x), nomine aequationis *Relationalis* audiet. Sed si secundum theoriae exhibitae praecepta, functiones *quintas* dictas L^5... tractas, aequationes jam *Resolventes* prodeunt; quippe in quibus reductione functionum symmetricarum facta et radice quinta dein sponte elisa, omnia per b, c, d, y dantur. — In quo negotio autem, ob magnitudinem operationum dextre et per artificia procedendum est. — Expediet autem, designari a me hoc loco *comparationem* inter calculos *Lagrangii* meosque. Positio *Lagrangii* est, ut scimus haec:

$$Q = x + \alpha u + \alpha^2 r + \alpha^3 q + \alpha^4 p, \qquad \text{A.)}$$

procedens nempe per potestates $\alpha, \alpha^2, \alpha^3, \alpha^4$. In hac reposito $u = -(x + p + q + r)$ fit:

$$Q = (1 - \alpha) x + (\alpha^4 - \alpha) p + (\alpha^3 - \alpha) q + (\alpha^2 - \alpha) r, \qquad \text{B.)}$$

Quae est jam nostra (§. 50, Nro. 14). Quae nostra ibi posito $Q = \alpha(1 - \alpha) L$ in *cabbalam* abiit. Sic utriusque theoriae consensum habes. Quare si quis *Lagrangianum* calculum *reiterabitur*, adhibendo autem formam (B) loco formae (A), tum patebit, ex radicibus Lagrangio dictis $z' \ldots z^{VI}$, summam ternarum quarundam aequalem esse summae trium *reliquarum*. Et prodibit nempe phaenomenum illud, quod (§. 42) mihi $\varphi = \psi$ sonat. Et Lagrangiana nempe sexta Resolubilis est. Id quod vir magnus obstinate satis et praecipitanter *negaverat*. Videatur enim celebris ejus tractatus (§. 58 in ambobus ultimis segmentis; ubi egregie mentiri immortalem virum nunc palam est.) Et vid. ibid. (§. 94 fin.) itemque inprimis (§. 86), conf. (§. 109). — Simul patet, quod (ibid. in praefat. ante §. 51) asserta *Bezoutiana* omnino recte habent. — Nec minus *Euleri* assertum recte habet; qui resolventem gradus 24 *mi* pro *resolubili* declaravit, si recte *tractetur*. — Quo asserto Eulerus ad resolutionem praeparandam imo *propius* quasi inservivit, quam Lagrangius. Quum enim vir hic acutissimus 24 *mae* istius decompositionem in *biquadraticas* mediante *Sexta* invenisset, hanc sextam (quod mirum sane est,) pro *Non resolubili* declaravit, et sic ergo resolutionis (tum *per Se*, tum per Tschirnhusii praecise methodum, quae vera jam perhibetur,) spem posteris tantum non Desperabilem effecit; Eulero contra

nil, quod spem deviaret seu *praecluderet*, asserente. Quoniam autem Phoenix ille Gallorum jam per *proprios* imo calculos convictus et confessus censeri debet, methodum Tschirnhusianam ad sextam *resolubilem*, id est ad sursolidae *resolutionem* ducere, id quidem in Tschirnhusii gloriam et vindicias unice satis est. — At vero reiteratione calculi Lagrangiani ne *opus* quidem est. Ante oculos enim est Lagrangii functio (A), unde et ista (B). Et haec (B) pro $Q = a(1-a) L$ in *cabbalam* mihi dictam (§. 38, Nro. 1) abit. Atque sic igitur penes Lagrangium omnia prorsus ut in hoc *nostro* libro procedent. Et exhibui nempe (§. 38 — §. 57) theoriam tum horizontalem tum verticalem praecise Eam, quam exhiberi posse Lagrangius (omnino gratis) desperaverat. — *Nota.* In *Arte cossae* (1813) dederam pro inveniendis resolventium duobus extremis coefficientibus, *primo* nempe et *ultimo*, methodum quidem speciosam, sed nec tamen legitimam vel efficacem. Ut praesens liber docet. — Et methodus dicta *criterio debito* finali $X = 0$ caruit; id quod in *Cardano Suevo* et detexi et publice agnovi.

Atque haec jam pro cossae theoria stabilienda videntur sufficere; et est promtus ad *altiores* gradus transitus. Nec deerit, qui ad *sextam* $x^6 + bx^4 - cx^3 + dx^2 - ex + y = 0$ transire velit, et saltim doceat, quod a *quinto* gradu et functionibus resolubilibus pendeat. — Ceterum quum varii Geometrarum conatus circa cossam, attentione publica digni semper visi sint, ergo non deerunt puto, qui solutioni praestitae attentum animum praebere velint. Qualem aliorum animum sperare fas est iis, qui pro augmento scientiae vires qualescunque suas intendunt. Quare Academicos Goettingenses et Parisinos, vel qui aliis locis viri candidi et scientes rei literariae praesunt, modeste rogo, uti de re gesta publice referre velint. — Hoc loco autem scripta duo a me olim edita (*Apollonius Suevus* 1820, *Pythagoras Suevus* 1824) ob inventorum incredibilem venustatem, jure meo et in emolumentum scientiae publice commendo. — Ad praesentem autem theoriam sciendum est, quod inventa alia cossica materiae sane excellentissimae volueram adhuc Historice saltim proponere; verum tamen rem supprimere, diversis titulis consultum duxi. — Ceterum praesens hoc de cossae quintae resolutione opus, utique salvo magnorum virorum honore ac merito conscriptum est unice eo consilio, ut supplendâ hac obsoleta theoriae lacunâ ceteris mortalibus aliquo modo bene inservirem.

Corrigenda

pag. 8 lin. 11 pro ³IC lege 3IC

ibid. lin. 9 ab infra: pro u_s lege u^s

[Sic ibi fit $2ux\sqrt{3}=4a+uu$; quae posito $u=2z\sqrt{3}$ Relationalem sistit.]

pag. 17 lin 7 ab infra (et pag. 23 lin. 21) pro: *furore* lege *fervore*

— 42 Nro. 16 signa — minuta nimis et fere invisibilia sunt. Sed *sunt* tamen — signa. Similiter §. 20 initio.

ibid. lin. 2 ab infra: lege successum

§. 45 lin. 4 pro *solas* lege solos

In Philos. Coss. §. 11 et §. 12 pro $w=x+pt$ lege $w=t+nx$